第一篇　可靠性计算和估计的分析法

第一章　部件的可靠性

§1·1　不可修部件的可靠性特征量

所谓部件，在本书中是指在任何装配等级上的产品，在研究部件可靠性时，总是把它当作整体看待，而不管其内部关系及其组成部分的可靠性如何。我们认为（这也是一个重要假设）部件无故障工作时间 ξ（或部件的寿命）是随机变量，假定其分布函数为

$$F(t)=P\{\xi<t\}.$$

今后，我们总是假设 $F(t)$ 是绝对连续的。即，存在分布密度 $f(t)=F'(t)$ 且 $F(t)=\int_0^t f(x)\mathrm{d}x$。

其补的概率

$$\overline{F}(t)=1-F(t)=P\{\xi\geqslant t\},$$

叫做**无故障工作概率**，或简称可靠度函数。我们令 ξ_t 表示在 $\xi\geqslant t$ 时的随机变量 $\xi-t$。ξ_t 是部件能生存到时刻 t 的条件下的剩余寿命。显然

$$P\{\xi_t\geqslant x\}=P\{(\xi-t)\geqslant x|\xi\geqslant t\}=\frac{P\{\xi\geqslant x+t\}}{P\{\xi\geqslant t\}}=\frac{\overline{F}(t+x)}{\overline{F}(t)}.$$

其中，当部件能生存到时刻 t 的条件下，当 $\Delta t\to 0$ 时，在时间间隔 $(t,t+\Delta t)$ 内发生故障的概率为

$$P\{\xi_t<\Delta t\}=\frac{F(t+\Delta t)-F(t)}{\overline{F}(t)}=\frac{f(t)}{\overline{F}(t)}\Delta t+o(\Delta t),\ \Delta t\to 0.$$

将故障的条件概率密度

$$\lambda(t)=f(t)/\overline{F}(t). \tag{1.1}$$

叫做**故障率**。故障率是很重要的可靠性特征量，它能决定每一时刻的可靠度。可粗略地认为 $\lambda(t)$ 是部件生存到时刻 t 的条件下，在时刻 t 之后的很小的时间间隔内平均单位时间里发生故障的概率。依（1.1）式可很容易地得到用故障率表示的可靠度函数为

$$\overline{F}(t)=\exp\left[-\int_0^t\lambda(x)\mathrm{d}x\right]. \tag{1.2}$$

由此式可得到

$$P\{\xi_t\geqslant x\}=\exp\left[-\int_t^{t+x}\lambda(u)\mathrm{d}u\right]. \tag{1.3}$$

显然，在部件能生存到时刻 t 的条件下，在时间间隔 $(t,t+\Delta t)$ 内无故障工作概率仅仅决

定于该区间的故障率。这就是说，故障率是可靠性的瞬时特征量。

$F(t)$、$f(t)$、$\overline{F}(t)$和$\lambda(t)$是可靠性的全部特征量。亦即，它们能反映不可修部件可靠性的全部信息。但是，在实际工作中，往往采用数字特征表示可靠性更方便。因为在使用大批同型产品中，由于故障造成的损失往往用可靠性特征量的一些平均值表示，其中最重要的数字特征是**平均寿命T**，即寿命的数学期望（均值）

$$T=M\xi=\int_0^\infty t\mathrm{d}F(t)=\int_0^\infty \overline{F}(t)\mathrm{d}t. \tag{1.4}$$

平均寿命T的几何意义是可靠度函数与坐标轴所包围的面积。

另一数字特征是寿命的方差

$$D\xi=M(\xi-T)^2=\sigma^2=\int_0^\infty(t-T)^2\mathrm{d}F(t)=\int_0^\infty t^2\mathrm{d}F(t)-T^2, \tag{1.5}$$

$\sigma=\sqrt{D\xi}$表示部件寿命对平均寿命偏差的均方根，叫做**标准方差**。在可靠性理论中，它的应用较平均寿命少得多，它主要用于寿命分布密度函数具有单峰值的部件。

有时利用这样的特征量：假设上述部件执行任务的时间是具有分布函数$\Phi(t)$的随机变量，那么在执行任务的时间内部件无故障的概率便是

$$P=\int_0^\infty \overline{F}(t)\mathrm{d}\Phi(t). \tag{1.6}$$

（1.4）和（1.6）式所表示的特征量以及其它一些特征量都属于通用特征量：平均效益。其定义：令$A(t)$表示部件无故障工作到时刻t的效益，则称

$$\int_0^\infty A(t)\mathrm{d}F(t), \tag{1.7}$$

为**平均效益**。当$A(t)=t$时，平均效益就是时间，而当$A(t)=\Phi(t)$时，便得到（1.6）式表示的特征量。下面，再举例说明此特征量，设在时刻$t=0$开始使用部件，在时间间隔(t_1, t_2)内完成某项任务。如果到时刻t_2前部件未发生故障，就能完成任务，记所得的效益为C_1。如果在时刻t_1前部件已发生了故障，就不能完成任务，显然效益等于零。如果在(t_1, t_2)内部件发生了故障，就导致损失C_2。对此项任务来说

$$A(t)=\begin{cases}0, & t<t_1;\\ -C_2, & t_1\leqslant t\leqslant t_2;\\ C_1, & t_2<t.\end{cases}$$

最后，必须指出，许多系统是间歇工作的，即工作阶段和停止工作阶段交替进行。在这种情形下，应区别**日历时间**和到时刻t前的**累积工作时间**，后者又叫做**总工作时间**。假设在停止工作的时间里部件可靠性不变，只有在总工作时间$\xi<t$时部件才发生故障，并且其分布函数为$F(t)$。

令h_x表示总工作时间达到x时对应的日历时间。通常，由于间歇具有随机性，所以h_x是随机变量，其分布用$\overline{\Phi}(t)=P\{h_x\geqslant t\}$表示（对于某些个别情形下，需要计算此分布）。令$\xi_1$表示部件发生故障的日历时间，则在日历时间时刻$t$之前部件无故障工作的概率为

$$P\{\xi_1\geqslant t\}=\int_t^\infty \overline{\Phi}_x(t)\mathrm{d}F(x). \tag{1.8}$$

此式应用时往往不方便。因此，要研究在工作中部件状态变化的更通用的公式（模型），并说明怎样估计这种部件的可靠性。

§1·2 可靠度的数学模型

若用统计法估计可靠度函数就要进行大量的试验；而试验又总是受时间的限制。因此，由试验所给出的可靠性信息只能反映在试验时间内部件的可靠性；而超过试验时间的可靠性信息就基本上不了解，即不能外推可靠性。假定已知可靠度的数学模型$\overline{F}(t)=\overline{F}(t;\ \alpha,\beta,\cdots)$，而其参数有一个或几个是未知的，这时的情况就完全不同了。估计这些参数所需的试验数据少得多；此外，在这些参数估计出来之后，便可在无穷大区间上估计每一时刻的可靠度。

求分布函数模型的方法有两种。一是用统计法，即检验分布是否为具有某一分布参数的假设；二是物理法，即建立故障物理模型，并用数学表达式描述之。前者的主要缺点是有局限性，它是根据试验数据进行统计推断，即证明在给定的试验时间内分布属于哪一种模型的假设。由于试验是在一定时间范围内进行的，因此即使证明了分布属于假设的分布的置信度很高，也不应认为在此试验时间范围以外的时间里仍然服从此分布。因为随着时间的推移，有可能产生新的故障机理。后者的主要缺点是需要有关故障物理方面的大量和深入的（常常是微观的）信息。然而，对此不应持悲观态度，在可靠性理论和实践中，仍然可以使用几种常用的模型。现在分别介绍如下。

指数分布 称分布形式为

$$\overline{F}(t)=e^{-\lambda t}=\exp(-\lambda t)$$

的模型为**指数分布**。其中$F(t)=1-e^{-\lambda t}$，$f(t)=\lambda e^{-\lambda t}$，$\lambda(t)\equiv\lambda$。由（1.2）式知，当$\lambda(t)\equiv\lambda$时，则$\overline{F}(t)=\exp(-\lambda t)$。指数分布的平均寿命$T$为

$$T=M\xi=\int_0^{\infty}e^{-\lambda t}dt=\frac{1}{\lambda}. \tag{1.9}$$

用平均寿命T表示的可靠度为

$$\overline{F}(t)=\exp(-t/T). \tag{1.10}$$

寿命的方差为

$$D\xi=1/\lambda^2=T^2.$$

于是，可用它们来验证指数分布。因为根据样本观察值能很容易地计算出平均寿命T和方差$D\xi$。若时间t远远小于平均寿命T，则可利用近似式

$$\overline{F}(t)\approx1-t/T \tag{1.11}$$

估计可靠度，其误差不超过$0.5(t/T)^2$。

下面，指出剩余寿命的分布

$$P\{\xi_t\geqslant x\}=\frac{\exp[-\lambda(t+x)]}{\exp(-\lambda t)}=\exp(-\lambda x).$$

由此可见，对于指数分布，剩余寿命分布与部件已工作了多长时间无关。可很容易地证明，

对于任意的 t 和 x，可靠度函数满足

$$\overline{F}(t+x)=\overline{F}(t)\overline{F}(x). \tag{1.12}$$

因此，$\overline{F}(t)=\exp(-\lambda t)$ 的性质是指数分布的重要特性[150]。这种所谓无记忆性的特性是在可靠性理论中应用马尔科夫理论的理论基础[150]。在可靠性理论中，指数分布的应用非常广泛。在绝大多数著作中，尤其是解比较复杂的数学问题的著作中，往往不予证明就假定可靠度函数是指数分布。其主要根据如下：

① 大家都这样计算；

② 若不假定是指数分布就很难计算；

③ 即使不是指数分布，应用指数分布也能得到较好的近似结果；

④ 当故障信息不足时，自然要用指数分布来估计。因为它是最简单的单参数分布。

显然，前两个根据并不严谨。后面将阐述把任意分布假定为指数分布解很困难的可靠性问题的方法。至于根据③完全决定于问题的类型——若用同一平均寿命的指数分布代替任意分布时，则有些问题所得到的可靠性特征量相差很小，有的问题则可能增加或减小几倍。最后，根据④就更不严谨了——有些问题，用指数分布来代替其真实分布时，在本质上歪曲了可靠性统计信息，即使得到了用统计信息表示的可靠度表达式，但也不会有好的效果。

总之，可以得出结论：最重要的是理解应用指数分布的根据，并知道在什么情况下服从指数分布。

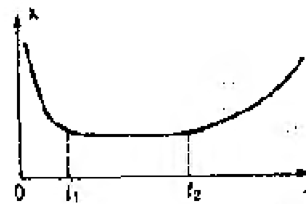


图 1.1

1. 关于部件寿命服从指数分布的假设可以进行统计假设检验。对于很多部件来说，根据大量的统计数据绘出的故障率曲线如图 1.1所示，根据故障率曲线形状的特征，可将时间轴分为三个区间。在第一个区间 $(0,t_1)$ 里故障率很大。这是因为对任何大批部件进行试验时，总是存在有缺陷的部件参加试验，它们在试验开始后不久就发生故障了。因此，在该区间的故障率很大。通常称此区间为试车阶段。在第二区间 (t_1,t_2) 里故障率基本不变，通常称此区间为正常工作阶段。在第三区间 (t_2,∞) 里故障率又增加很快，通常称此区间为老化阶段。在此区间部件会发生不可逆的物理、化学变化，部件因老化、磨损而导致可靠性降低，故障率单调递增。

通常，由上述部件组成的系统在使用前都要进行试车。在试车中部件发生故障就用实际上可能有缺陷的新部件来更换。即，系统是从时刻 t_1 开始使用的。许多类型的部件（如，电子部件）要经过很长的时间才能达到老化阶段，实际上，部件的寿命处于正常工作阶段。在此阶段的故障率是常数。在此情况下，可用指数分布计算可靠性特征量。

但应指出，对指数分布的假设检验要遵循两项规则：试验的样本容量要足够大（要求故障数不少于几百个）；如果试验是在规定的时间内完成的（即定时截尾试验），那么只能证明在此规定的时间内服从指数分布。无论试验样本多么大，都不能肯定在此时刻之外仍然服从指数分布。

2. 在某些条件下，可以从物理方面验证（1.12）式，由此得出结论是否服从指数分布。例如，若宇宙飞船被相当大的陨石流击中而导致故障，可以认为陨石流在空间和时间上都是均匀流，且每一陨石的轨道是相互独立的（这是很自然的），在给定的时间间隔里陨石流击中飞船的概率只决定于该时间间隔的长度，与飞船在此时间间隔以前飞行的时间无关。这就是说，在这种情况下应用（1.12）式是正确的。

3. 部件的故障一般是由于累积的随机失常超过了临界水平所引起的。随机过程理论已证明[36]，由一般相当微弱的失常累积效应引起的首次故障时间渐近服从指数分布。下面，举例说明之。假设发生故障的唯一原因是由于振动而引起触点断开。一般，振动是随时间变化的有规律的高速振动的平稳过程。如果振幅超过了某一临界水平，就会引起触点断开。在这种情形下，可以放心地应用指数分布。

4. 下面再来研究由许多部件组成的复杂系统。如果系统没有裕度设计，那么每个部件发生故障都会导致系统发生故障。可以认为，当部件发生故障时进行的更换是瞬时完成的。于是，系统的故障流就是各部件故障流之和。故障流理论[153]证明：大量的独立平稳流之和是渐近泊松流。这里，我们不去讨论它，只是给出其一特性——从某一给定时刻起到泊松流首次到达右侧最近点的时刻止的时间服从指数分布。于是，若系统是由很多可修部件组成的，且系统工作了相当长的时间，则这时系统从给定时刻到发生故障时刻之间的时间非常近似指数分布。

以上阐述了出现指数分布的所有情形。在可靠性理论问题中，每当采用指数分布假设时都必须进行假设检验。

正态分布 严格地讲，在可靠性理论中所采用的是截尾正态分布。其可靠度为

$$\overline{F}(t)=P\{\xi\geqslant t\}=\frac{C}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{t}^{\infty}\exp\left[-\frac{(x-T)^{2}}{2\sigma^{2}}\right]\mathrm{d}x. \tag{1.13}$$

式中 C——常数，由初始条件 $\overline{F}(0)=1$ 决定。但在可靠性工程中，由于寿命的方差远远小于平均寿命，故可取 $C=1$。于是 $M\xi=T$，$D\xi=\sigma^{2}$。正态分布的故障率曲线如图 1.2 所示，$\lambda(t)$ 曲线是单调递增的，其近似渐近线 $y=(t-T)/\sigma$。

正态分布能描述哪些故障模型呢？一般，所有故障都可分为两种：随机性突变故障和由于磨损老化所产生的渐变故障。一般，突变故障服从指数分布，而渐变故障服从正态分布。实际上，这种观点并无实用价值，因为工程中并无这两种故障的严格定义能将二者绝然分开。如果故障密度函数 $f(t)$ 曲线呈单峰值形状且 $T\gg\sigma$，那么一般可用正态分布来研究，且精度较高。

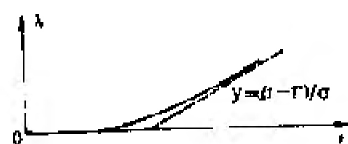


图 1.2

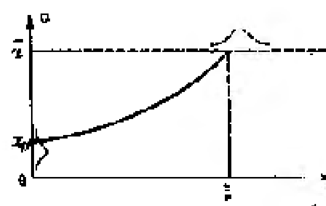


图 1.3

可以建立会自然产生正态分布的一种模型。假设部件的可靠性决定于随时间变化的参数 $\alpha(t)$，且把故障看作是参数 $\alpha(t)$ 超过临界值 $\overline{\alpha}(t)$ 的结果，如图1.3所示。又假设参数 $\alpha(t)$ 变化的速度 $\alpha'(t)$ 只是时间的函数，则 $\alpha'(t)=\varphi[\alpha(t)]$，$\varphi(x)>0$。于是，积分可得

$$\Phi(\alpha)=t+\Phi(\alpha_0).$$

式中

$$\Phi(x)=\int\frac{\mathrm{d}x}{\varphi(x)};\qquad \alpha_0=\alpha(0).$$

由于函数 $\Phi(x)$ 单调递增，所以首次故障前工作时间为

$$\xi=\Phi(\overline{\alpha})-\Phi(\alpha_0).$$

参数的初始值 α_0 是随机的。因为工艺的分散性几乎总是服从正态分布的，所以很自然地可以认为 α_0 是服从均值为 $\mathrm{M}\alpha_0=a_0$ 和方差 $\mathrm{D}\alpha_0=\sigma_0^2$ 的正态分布随机变量。通常，标准方差 σ 很小。然而，如果在点 a_0 将函数 $\Phi(\alpha_0)$ 展开，且仅取一次项，则

$$\xi=\Phi(\overline{\alpha})-\Phi(\alpha_0)\approx\Phi(\overline{\alpha})-\Phi(a_0)-\Phi'(a_0)(\alpha_0-a_0).$$

由此可见，无故障工作时间服从均值

$$T=\Phi(\overline{\alpha})-\Phi(a_0)=\int_{a_0}^{\overline{\alpha}}\frac{\mathrm{d}x}{\varphi(x)}.$$

和方差

$$\mathrm{D}\xi=\sigma^2=\sigma_0^2/\varphi^2(a_0).$$

的正态分布。

应当指出：这种模型的适用范围相当窄。因为影响参数 $\alpha(t)$ 变化的还有外部随机事件。然而，如果这些事件对参数 $\alpha(t)$ 的变化影响不大的话，那么仍然可以近似地认为服从正态分布。

威布尔—格涅钦科分布 称具有形式

$$\overline{F}(t)=\exp[-(\lambda t)^p],\qquad p>0 \tag{1.14}$$

的分布为威布尔—格涅钦科分布。其各特征量为

$$\lambda(t)=p\lambda^p t^{p-1};\quad T=\Gamma(1+1/p)\lambda^{-1}. \tag{1.15}$$

很明显，当 $p<1$ 时，故障率 $\lambda(t)$ 是单调递减的；当 $p>1$ 时，故障率 $\lambda(t)$ 是单调递增的；当 $p=1$ 时，故障率 $\lambda(t)$ 是不变的常数。

威布尔—格涅钦科分布在可靠性理论中应用很广。应用该分布的合理性可解释为：系统由许多部件组成，各部件的故障是相互独立的；在时刻 t 第 k 个部件的可靠度为

$$\overline{F}_k(t)=1-a_k t^p+o(t^p)$$

设由 n 个部件组成的系统，只要任一部件发生故障就能导致系统发生故障，于是该系统的可靠度函数为

$$\overline{F}(t)=\prod_{k=1}^{n}\overline{F}_k(t)=\exp\left[\sum_{k=1}^{n}\ln(1-a_k t^p+o(t^p))\right]$$

$$\approx\exp\left[-\sum_{k=1}^{n}a_k t^p\right]=\exp(-at^p).$$

这样，我们就得到了威布尔—格涅钦科分布。然而，绝对不能因此得出结论，认为各部件的参数 p 总是相同的。当参数 p 不同时，则根本不会得到威布尔—格涅钦科分布的结论。但，

应该看到威布尔—格涅钦科分布较指数分布更具有一般性。当 $p=1$ 时，它就是两参数指数分布，即指数分布是威布尔—格涅钦科分布的特例。因此，它在工程中的应用较指数分布更广。

Γ分布 称具有密度函数为

$$f(t)=\frac{\lambda^p t^{p-1}}{\Gamma(p)}e^{-\lambda t}, \qquad p>0 \tag{1.16}$$

的分布为Γ分布。当 $p=n$ 是整数时，则可靠度函数可近似地表示为

$$\overline{F}(t)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}.$$

在此情况下，寿命 ξ 可看作是 n 个独立随机变量 ξ_i 之和，即 $\xi=\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_n$。其中每一 ξ_k 都服从同一指数分布 $P\{\xi_k\geqslant t\}=\exp(-\lambda t)$。

不难指出，若寿命 ξ 服从Γ分布，则其均值和方差分别为

$$M\xi=p/\lambda; \qquad D\xi=p/\lambda^2. \tag{1.17}$$

因为Γ分布类本身包含指数分布类（当 $p=1$ 时），因此应用此分布较指数分布更广，而且有时应用此分布较应用指数分布更方便。当 $p\to\infty$ 时，Γ分布渐近正态分布。所以，对于那些近似单峰值但不对称的分布，不宜用正态分布来描述时，可用Γ分布来近似描述。Γ分布具有简单的拉普拉斯变换：

$$\int_0^{\infty}e^{-zt}f(t)dt=\frac{\lambda^p}{(\lambda-z)^p}.$$

可见，用拉普拉斯变换计算Γ分布问题比较方便。

混合分布 设由 n 个工厂生产的某型部件，其中第 k 厂生产的部件数占 $100a_k\%$，并且 $\sum_{k=1}^{n}a_k=1$。第 k 厂生产的部件寿命服从参数为 λ_k 的指数分布。各厂生产的部件都送往总库毫无次序地混合保管着。试问：从仓库中随机地取出一个部件，其可靠度函数是怎样的？根据全概率公式可很容易地求出：

$$\overline{F}(t)=\sum_{k=1}^{n}a_k e^{-\lambda_k t}, \tag{1.18}$$

称这种分布为**混合指数分布**。现在来研究连续混合分布

$$F(t)=\int_0^{\infty}e^{-\lambda t}a(\lambda)d\lambda, \qquad \int_0^{\infty}a(\lambda)d\lambda=1.$$

一般该混合分布可用斯蒂尔吉斯（Стильтьес）积分表示为

$$\overline{F}(t)=\int_0^{\infty}e^{-\lambda t}dA(\lambda), \qquad \int_0^{\infty}dA(\lambda)=1. \tag{1.19}$$

如果把参数 λ 作为服从分布 $A(\lambda)$ 的随机变量，则 $\overline{F}(t)=M\exp(-\lambda t)$。对于这种混合分布模型，可很容易求出其故障率 $\lambda(t)=M\lambda\exp(-\lambda t)/M\exp(-\lambda t)$，且其导数为

$$\lambda'(t)=\frac{(M\lambda e^{-\lambda t})^2-M\lambda^2e^{-\lambda t}Me^{-\lambda t}}{(Me^{-\lambda t})^2}.$$

假设 $\xi=\lambda e^{-\lambda t/2}$，$\eta=e^{-\lambda t/2}$，由许瓦兹[150]不等式 $(M\xi\eta)^2\leqslant M\xi^2M\eta^2$ 可求出 $[M\lambda e^{-\lambda t}]^2$

$\leqslant M\lambda^2 e^{-\lambda t} M e^{-\lambda t}$。因而，$\lambda'(0)\leqslant 0$，即，故障率是单调递减的。混合分布的这种特性骤然看起来难以置信和不自然，然而从统计的观点看故障率时，就可以理解。如果我们对大批部件进行试验，大批部件是各组部件混合起来的，且各组部件的故障率是不同的常数，在试验过程中故障率大的部件先发生故障，而故障率小的部件后发生故障，因此未发生故障的部件平均故障率是减小的。

§1·3　可修部件的可靠性特征量

瞬时修复部件的可靠性特征量　假设部件在时刻 $t=0$ 开始工作，在某时刻 $t_1\geqslant\xi_1$ 发生故障。前面我们只研究了在此时刻之前的可靠度，而没有研究在此时刻之后的情况。但是，在实践中，如果部件是昂贵的，并且结构复杂；或者为使系统正常工作，组成系统所必要的部件发生故障后就要更新。更新可分为两种——修理和更换。

下面，不区分这两种更新，认为在时刻 t 开始更新。首先，假设更新时间较无故障工作时间很短，于是此时间可忽略不计，即可以认为更新是瞬时完成的。更新后，部件又开始工作，并且经过时间 ξ_2 又发生故障。在第二次发生故障的时刻 $t_2=\xi_1+\xi_2$ 进行第二次更新。此后部件又无故障工作了时间 $\xi_3,\cdots\cdots$。通过对此过程的研究，可提出基本假设：无故障工作时间 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots$ 是独立同分布的随机变量。于是

$$P\{\xi_n<t\}=F(t),\quad M\xi_n=T;\quad D\xi_n=\sigma^2;\quad f(t)=F'(t)。\tag{1.20}$$

如果更新是更换，则（1.20）式仍成立，如果更新是修理，则满足此条件的情形很少（例如，当决定可靠性的参数超过临界值时，修理是将该参数调整到初始的正常值）。但是，要考虑到 ξ_n 之间的相依性，就必须知道部件的结构及其组成部分的可靠性。本章不讨论这种情形，而只讨论部件的可靠性。

在（1.20）式的假设中，随机点的序列

$$0<t_1<t_2<\cdots<t_n<\cdots;\quad t_n=\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_n.$$

叫做**更新过程**。研究更新过程的理论叫做**更新理论**[178]。在更新理论中，研究了更新过程的各种特征量。在可靠性理论中，这些特征量就是可靠性相对应的特征量。现在引入以下记号（图1.4）：$F_n(t)=P\{t_n<t\}$，式中函数 $F_n(t)$ 可递推地定义为

$$F_n(t)=\int_0^t F_{n-1}(t-x)\,\mathrm{d}F(x),\qquad n>1,\quad F_1(t)=F(t)。$$



图 1.4

1. 设 $\nu(t)$——到时刻 t 前的故障次数。不难看出，$P\{\nu(t)\geqslant n\}=P\{t_n<t\}=F_n(t)$，由此得出

$$P\{\nu(t)=n\}=F_n(t)-F_{n+1}(t)。\tag{1.21}$$

$\nu(t)$是重要的可靠性特征量。例如，若已知其分布，就可计算出在给定时间内所需的备份部件数（若更新是更换的话）。

2．令$H(t)=M\nu(t)$——到时刻t前的平均故障次数。不难得到$H(t)$的表达式为

$$H(t)=\sum_{n=1}^{\infty}n[F_n(t)-F_{n+1}(t)]=\sum_{n=1}^{\infty}F_n(t). \tag{1.22}$$

称函数$H(t)$为**更新函数**。在更新理论中，更新函数起重要作用。显然，在时间间隔$(t,t+x)$中平均故障数等式$H(t+x)-H(t)$。

3．更新函数的导数

$$h(t)=H'(t)=\sum_{k=1}^{\infty}f_k(t), \qquad f_k(t)=F_k'(t), \tag{1.23}$$

叫做**更新密度函数**。由此定义可得出结论：在很小的时间间隔$(t,t+\Delta t)$里平均更新数等于$h(t)\Delta t+o(\Delta t)$。亦即，可以近似地说，更新密度是单位时间（若此单位很小）内的平均更新次数。但是，更新密度还有另一种解释——在无限小的时间间隔$(t,\ t+\Delta t)$内发生故障的概率$h(t)\Delta t+o(\Delta t)$。即，$h(t)$是时刻t以后的很小的时间间隔内单位时间发生故障的概率。这样表示并不十分严格：在$(t,t+\Delta t)$里发生第k次故障的概率等于$f_k(t)\Delta t+o(\Delta t)$。在无限小的时间间隔里发生两次或两次以上故障的概率是高阶无穷小量，可以忽略不计，并认为在此时间间隔里各次故障是互不相容的事件。于是，根据概率加法定理知，在$(t,t+\Delta t)$里发生故障的概率为

$$\sum_{k=1}^{\infty}[f_k(t)\Delta t+o(\Delta t)]=h(t)\Delta t+o(\Delta t),$$

（须知，有限个$o(\Delta t)$之和还是$o(\Delta t)$）。

因而更新密度是重要的可靠性特征量。在可靠性理论中，常将更新密度叫做故障密度。但是，不应将故障密度$h(t)$与故障率$\lambda(t)$混淆。故障密度$h(t)$是部件在时刻t的平均单位时间内发生故障的无条件概率，而故障率$\lambda(t)$是部件到时刻t未发生故障的条件下，在时刻t之后平均单位时间里发生故障的条件概率。

4．剩余寿命ξ_t。部件在时刻t前未发生故障，从时刻t到其后第一次发生故障的时刻之间的时间叫做**剩余寿命**，如图1.4所示。在更新理论中把剩余寿命ξ_t叫做**跃度**。ξ_t也是重要的可靠性特征量。例如，如果部件从时刻t开始工作，要求在时间x内完成任务，那么部件应在时间间隔$(t,t+x)$里不发生故障。不难求出剩余寿命ξ_t的分布为

$$P\{\xi_t>x\}=\overline{F}(t+x)+\int_0^t\overline{F}(t+x-u)h(u)\mathrm{d}u. \tag{1.24}$$

此式的推导并不复杂。由于事件$\{\xi_t>x\}$有两种可能：在时刻$(t+x)$之前未发生故障，其概率为$\overline{F}(t+x)$；或者在时间间隔$(u,u+\mathrm{d}u)$里发生故障，其概率为$h(u)\mathrm{d}u$，而到时刻$(t+x)$后无故障，其概率为$\overline{F}(t+x-u)$。对所有可能的$u(0\leqslant u\leqslant t)$积分，并将此结果与第一个概率相加，便得到所要证明的（1.24）式。

下面，研究一个特殊的典型的更新过程。设$\overline{F}(t)=e^{-\lambda t}$，即寿命服从指数分布。在这种条件下，更新过程叫做**泊松过程**。后面，我们将说明泊松过程在可靠性理论中有重要作用的原因。现在，我们来研究泊松分布的重要特征量。此过程的密度函数$f(t)=\lambda e^{-\lambda t}$，且因

$$f_{n+1}(t)=\int_0^t f_n(t-x)f(x)\mathrm{d}x,$$

所以，依次积分可得

$$f_n(t)=\frac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\lambda t}.$$

亦即，时刻t_n服从参数为n的Γ分布。对$f_n(t)$积分可得

$$F_n(t)=1-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}.$$

从而
$$P\{\nu(t)=n\}=\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}. \tag{1.25}$$

这是泊松流理论的基本公式。更新密度

$$h(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\lambda t}=\lambda. \tag{1.26}$$

可见，对于泊松流来说，更新密度同故障率是等价的。其次

$$H(t)=\int_0^t h(x)dx=\lambda t. \tag{1.27}$$

现在来研究剩余寿命ξ_t的分布

$$P\{\xi_t>x\}=e^{-\lambda(t+x)}+\int_0^t \lambda e^{-\lambda(t+x-u)}du=e^{-\lambda x}.$$

我们得到了有趣的骤然看起来似是而非的结果——剩余寿命ξ_t分布同全寿命分布完全相同。实质上，这一结论是由（1.12）式获得的显而易见的结果。由泊松过程特征可以容易地得出结论：在不相交的时间间隔里所发生的故障次数是相互独立的随机变量。

更新过程的渐近性质 在实际问题中，部件发生故障的时间和维修后再工作的总时间往往比平均寿命大很多倍。所以，要研究$t\to\infty$时更新过程的渐近性，并利用这一特性计算可靠性特征量。在这里，我们仅引用更新理论中的一些结论，而不予证明。

1．更新基本定理

$$\lim_{t\to\infty}\frac{H(t)}{t}=\frac{1}{T}. \tag{1.28}$$

2．勃拉克威（Bluckwe）定理 若$F(t)$是非格点式分布，则对任意x

$$\lim_{t\to\infty}[H(t+x)-H(t)]=x/T. \tag{1.29}$$

（如果随机变量只取值a_n，$n=0,1,2,\cdots$，则此分布叫做格点式分布；否则，叫做非格点式分布。因为随机变量按假定的密度分布，所以显然是非格点式分布）。

3．斯米特（Смит）中心定理 若函数$Q(x)$在（0，∞）是有界变量，$\int_0^\infty|Q(x)|dx<\infty$，而$F(t)$是非格点式分布，则

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^t Q(t-x)dH(x)=\frac{1}{T}\int_0^\infty Q(x)dx. \tag{1.30}$$

显然：其一，勃拉克威定理是斯米特中心定理的特例；其二，依勃拉克威定理可以无困难地导出斯米特中心定理。

4．若分布$F(t)$存在密度$f(t)$，对于某一p有$\int_0^\infty f^p(t)dt<\infty$，且当$t\to\infty$时，$f(t)\to$

0，则

$$\lim_{t\to\infty} h(t)=1/T.\qquad(1.31)$$

5. 若$F(t)$是非格点式分布，且存在方差$\sigma^2=D\xi$，则

$$\lim_{t\to\infty}[H(t)-t/T]=(\sigma^2-T^2)/2T^2.\qquad(1.32)$$

6. 在定理5的假设下，

$$\lim_{t\to\infty}P\left\{\frac{\nu(t)-t/T}{\sqrt{\sigma^2 t/T^3}}<x\right\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-u^2/2}du=\Phi(x).\qquad(1.33)$$

上述各定理都可用之估计相应的可靠性特征量。定理1表明，当时间t很大时，近似等式$H(t)\approx t/T$成立，且随着时间t的增加，其相对误差趋于零。而定理5进一步明确了此结果，它证明了等式$H(t)\approx t/T+(\sigma^2-T^2)/2T^2$的绝对误差随$t$的增加而趋于零。这两个定理可用之估计在大的时间间隔上的平均故障数。勃拉克威定理证明，在时间t大时，在时间间隔$(t,t+x)$内平均故障数与t无关，并等于x/T。定理6表明，到很长的时刻t为止时的故障数$\nu(t)$渐近于均值为$M\nu(t)\approx t/T$和方差为$D\nu(t)\approx\sigma^2 t/T^3$的正态分布。如果用更换的方法更新的话，则可用此分布计算在给定时刻t的备份部件数n_0和到时刻t需更换的部件数是$\nu(t)$，所以备份部件数n_0应满足$P\{\nu(t)\le n_0\}=1-\varepsilon$，式中$\varepsilon\ll 1$是风险率。假定时间$t$远远大于平均无故障工作时间$T$，$t\gg T$，则$\nu(t)$渐近服从正态分布。查标准正态分布百分位点表可查出$x_\varepsilon$之值，使$\Phi(x_\varepsilon)=1-\varepsilon$。于是，可取$n_0$为

$$n_0=t/T+x_\varepsilon\sigma\sqrt{t/T^3},\qquad(1.34)$$

即，以n_0个备份部件能以概率$1-\varepsilon$保证到时刻t足够用。

举例说明如下。设$T=100$h，$\sigma=20$h，$t=800$h，$\varepsilon=0.01$。这时$x_\varepsilon=2.33$，故所需的备份部件数为

$$n_0=\frac{800}{100}+2.33\sqrt{\frac{400\times800}{100^3}}\approx85\text{个}.$$

须指出，到目前为止，在可靠性工程中都是利用泊松过程相应的公式代替（1.34）式来计算备份部件数，但它只适用于$\sigma=T$的情形。如果σ与T相差很大，则用泊松过程计算的备份部件数将与真值相差很大。例如，在上例中，用泊松过程计算的$n_0=101$，而不是85。

现在再来研究斯米特中心定理的应用。用它来分析更新过程的渐近特征很合适。现利用此定理来研究当$t\to\infty$时，剩余寿命ζ的极限性质。由（1.24）式可得

$$P\{\zeta>x\}=\lim_{t\to\infty}P\{\zeta_t>x\}=\lim_{t\to\infty}\int_0^t\bar F(t+x-u)dH(u).$$

在斯米特中心定理中，若$Q(t)=\bar F(t+x)$，便可求出上式中最后的那个极限为

$$P\{\zeta>x\}=\frac{1}{T}\int_0^\infty\bar F(t+x)dt=\frac{1}{T}\int_x^\infty\bar F(u)du.\qquad(1.35)$$

这就是平稳剩余寿命的分布。在工程中正是采用此式，而不是（1.24）式。今求出平稳平均剩余寿命ζ如下：

$$M\zeta=\int_0^\infty P\{\zeta>x\}dx=\int_0^\infty\frac{t}{T}\bar F(t)dt=\int_0^\infty\frac{t^2}{2T}dF(t)=\frac{T}{2}+\frac{\sigma^2}{2T}.\qquad(1.36)$$

此结果好像似是而非。因为好像随便取一时刻t都会有$M\zeta_t=T/2$。但事实并非如此。若随机地取的点以较大的概率落在较大的时间间隔上，则该点所在的那一时间间隔的平均长度大于$T/2$。

上面对大的时间t给出了更新过程的一些特征估计，下面再引入一些不等式，当时间t很小时（相当于开始阶段）用这些不等式可以获得较好的近似估计。后一情形，在可靠性理论中很重要，因为一般多部件系统在工作过程中只是少数部件发生故障，而且部件发生故障的概率又很小，即$F(t)\ll 1$。由不等式$\max\limits_{k\le n}\xi_k\le\xi_1+\cdots+\xi_n=t_n$可得出结论

$$F_n(t)=P\{t_n<t\}\le P\{\max_{k\le n}\xi_k<t\}=F^n(t).$$

于是，依（1.22）式可得出

$$F(t)\le H(t)\le F(t)/[1-F(t)]. \qquad (1.37)$$

如果$F(t)$很小，则此不等式变为近似等式$H(t)\approx F(t)$。

其次，当t小时，$\nu(t)$等于0或1，而$\nu(t)\ge 2$的概率很小。因为$P\{\nu(t)\ge 2\}=F_2(t)\le F^2(t)$，所以$P\{\nu(t)=1\}\approx F(t)$，$P\{\nu(t)\ge 1\}\approx F(t)$。由（1.23）式可以得出估计式

$$f(t)\le h(t)\le f(t)+M(t)\frac{F(t)}{1-F(t)}, \qquad (1.38)$$

式中　$M(t)=\max\limits_{x\le t}f(x)$。

具有有限更新时间的可修部件的可靠性　现在，假设更新时间是有限的，如图1.5所示。



图1.5

引入以下符号：无故障工作时间序列为$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots$；更新时间序列为$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n,\cdots$；故障时刻序列为$t_1',t_2',\cdots,t_n',\cdots$；更新时刻序列为$t_1'',t_2'',\cdots,t_n'',\cdots$。如上所述，假设所有的$\xi_i$和$\eta_i$是独立同分布的：

$$P\{\xi_i<t\}=F(t),\ M\xi_i=T_1,\ D\xi_i=\sigma_1^2;$$
$$P\{\eta_i<t\}=G(t),\ M\eta_i=T_2,\ D\eta_i=\sigma_2^2.$$

前面已讨论了这些假设在多大程度上是合理的。现再引入以下符号：$\nu_1(t)$为到时刻t之前的故障数，$\nu_2(t)$为到时刻t之前的更新数（为避免误会应注意，这里的更新时刻是指部件由故障状态变为正常状态的时刻）。显然，由更新时刻t_n''组成一个更新过程，其分布函数为

$$\Phi(t)=\int_0^t F(t-x)dG(x).$$

所以，对$\nu_2(t)$、$H_2(t)$和$h_2(t)$来说，上述各精确公式和近似公式都是正确的。由时刻t_n'构成了所谓广义更新过程。在此过程中，首次故障时间的分布同其它故障间隔时间的分布不同。推导$\nu_1(t)$、$H_1(t)$和$h_1(t)$的公式并不难，在此不赘述。至于渐近公式，可以说除了剩余寿命分布的形式不同外，其它特征量的分布形式均不变。因为时刻t能以正概率落在更新期

间，这样一来（依定义），此时的剩余寿命等于零。如上所述，剩余寿命的精确分布为

$$P\{\zeta_t > x\} = \bar{F}(t+x) + \int_0^t \bar{F}(t+x-u)h_2(u)\mathrm{d}u. \tag{1.39}$$

再利用斯米特中心定理，便得到

$$P\{\zeta > x\} = \lim_{t\to\infty} P\{\zeta_t > x\} = \lim_{t\to\infty}\int_0^t \bar{F}(t+x-u)\mathrm{d}H_2(u) = \frac{1}{T_1+T_2}\int_x^\infty \bar{F}(u)\mathrm{d}u. \tag{1.40}$$

在任意时刻 t 内部件处于正常状态的概率为

$$P\{\zeta > 0\} = \frac{1}{T_1+T_2}\int_0^\infty \bar{F}(t)\mathrm{d}t = \frac{T_1}{T_1+T_2}. \tag{1.41}$$

这一重要特征量叫做**可用度**。由遍历定理可知，可用度等于部件处于正常状态的平均时间T_1与部件处于正常状态的平均时间T_1和平均更新时间T_2之和的比值。

总工作时间的分布 对具有有限更新时间的部件来说，还有一个很重要的特征——总工作时间。如上所述，令ξ_n、η_n为部件处于第 n 个正常状态、故障状态的时间间隔。为不失一般性，对ξ_n和η_n的分布模型不加任何限制。例如，它们可以是相依的。下面研究二状态过程$e(t)$。令$e(t)=0$表示部件处于故障状态；$e(t)=1$表示部件处于正常状态，称积分$S_t=\int_0^t e(x)\mathrm{d}x$为总工作时间，记作$S_t$。再引入另一变量$h_x$为总工作时间为$x$时的日历时间。它是根据$h_x=\sup\{t: S_t\leqslant x\}$算出的。现在根据$e(t)$绘出两个质点流，如图1.6所示。在第一个流中，相邻两点间的时间间隔为$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots$；在第二个流中，相邻两点间的时间间隔为$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n,\cdots$。

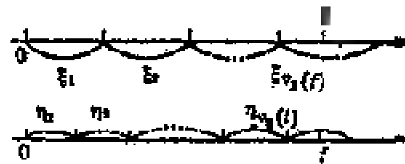


图 1.6

令$\nu_i(t)(i=1,2)$——第 i 个流到时刻 t 为止的点数。于是，恒等式$P\{S_t<x\}=P\{h_x>t\}$成立。而变量h_x可表示为$h_x=x+\eta_1+\eta_2+\cdots+\eta_{\nu_1(x)+1}$。所以

$$P\{h_x>t\}=P\{\eta_1+\cdots+\eta_{\nu_1(x)+1}>t-x\}=P\{\nu_1(x)\geqslant\nu_2(t-x)\}.$$

于是，得到恒等式

$$P\{S_t<x\}=P\{h_x>t\}=P\{\nu_1(x)\geqslant\nu_2(t-x)\}. \tag{1.42}$$

应指出，此式与随机变量ξ_i和η_i的联合分布完全无关。上式可用之求随机变量S_t和h_x的分布

$$P\{S_t<x\}=P\{h_x>t\}=\sum_{n=0}^{\infty}[G_n(t-x)-G_{n+1}(t-x)]F_n(x). \tag{1.43}$$

如果时间 t 与平均周期T_1+T_2相比不大的话，则可以用此级数求 t 的分布，反之，求和必须取很多项。即使在两个分布F和G都是指数分布的情形，也不用这个级数求和。为了在 t 和 x 很大时估计S_t和h_x的分布，可以运用下述命题。

当$t\to\infty$和$x\to\infty$时，则变量S_t和h_x渐近服从正态分布，其均值分别为

$$MS_t \sim \frac{T_1}{T_1+T_2}t; \qquad Mh_x \sim \frac{T_1+T_2}{T_1}x \tag{1.44}$$

和方差分别为

$$DS_t \sim \frac{T_1^2T_2^2\left(\frac{\sigma_1^2}{T_1^2}+\frac{\sigma_2^2}{T_2^2}\right)}{(T_1+T_2)^3}t; \qquad Dh_x \sim \frac{\left(\frac{\sigma_1^2}{T_1^2}+\frac{\sigma_2^2}{T_2^2}\right)T_2}{T_1}x. \tag{1.45}$$

上述结论的证明并不很难，但很繁琐，这里不予证明，而只介绍其思路。首先，上面已谈到当$t\to\infty$和$x\to\infty$时，变量$\nu_1(x)$和$\nu_2(t-x)$渐近服从正态分布。在恒等式（1.42）的最后一个概率中变量$\nu_1(x)$和$\nu_2(t-x)$是渐近服从均值为0方差为1的标准正态分布的随机变量。其次，让t和x一致趋于无穷大，以使在正则化变量情形下系数和自由项存在有限极限。因为独立正态随机变量的线性组合仍为正态随机变量，这就可得到结论的证明。

§1·4 老化部件

老化部件类的定义 如上所述，假设部件无故障工作时间是服从分布函数$F(t)$的随机变量ξ，而ξ_t是已无故障工作到时刻t的部件的剩余寿命。通常，随着工作时间的增加部件总是要磨损老化，其可靠性要降低。这说明，随着时间t的增加剩余寿命ξ_t在某种程度上来说会缩短或至少短于全寿命。不论是技术装备还是生物体的统计资料都证明了这一点。为了给出老化的严格定义，我们引入随机变量的次序关系如下：

$$\xi \underset{1}{<} \eta \overset{def}{\iff} M\xi \leq M\eta;$$

$$\xi \underset{2}{<} \eta \overset{def}{\iff} P\{\xi\geq x\}\leq P\{\eta\geq x\}，对所有x\geq 0.$$

符号$\overset{def}{\iff}$表示“依定义”。很明显，第一个序关系比第二个序关系弱，亦即，由$\xi\underset{2}{<}\eta$可得到$\xi\underset{1}{<}\eta$。对于由实参数$\alpha(\alpha\in R)$决定的随机变量族$\xi_\alpha(\alpha\in R)$来说，所引入的序关系导致相应的单调性定义，我们用下列符号表示这些定义：$\xi_\alpha\underset{i}{\uparrow}(i=1,2)$表示按$i$的序单调递增；$\xi_\alpha\underset{i}{\downarrow}(i=1,2)$表示按$i$的序单调递减。现在可以定义老化部件类。下面所谈到的“老化部件”、“老化随机变量”和“老化分布”的意义相同。如果对所有的$t\geq 0$都有$\xi_t\underset{2}{\downarrow}$，则称部件（随机变量、分布）属于类$S_0$。相应地对一切$t\geq 0$来说，还可将部件相应地定义三个类：

$$\xi\in S_1 \overset{def}{\iff} \xi_t \underset{2}{<} \xi_0 = \xi; \qquad \xi\in S_2 \overset{def}{\iff} \xi_t \underset{1}{\downarrow}; \qquad \xi\in S_3 \overset{def}{\iff} \xi_t \underset{1}{<} \xi.$$

由这些定义可以推出$S_0\subset S_1\subset S_3$，$S_0\subset S_2\subset S_3$。可以举例说明类$S_1$和$S_2$无包含关系。

现在用变量ξ的分布函数描述这些类。对于类S_0来说，对一切$x\geq 0$，$P\{\xi_t\geq x\}=\overline{F}(x+t)/\overline{F}(t)$是对$t$单调不增的，即

$$\left[\frac{\overline{F}(t+x)}{\overline{F}(t)}\right]' = \frac{f(t)\overline{F}(t+x) - f(t+x)\overline{F}(t)}{\overline{F}^2(t)} \leq 0.$$

或
$$\lambda(t)=\frac{f(t)}{\bar F(t)}\leq\frac{f(t+x)}{\bar F(t+x)}=\lambda(x+t),$$
因此，可用故障率$\lambda(t)$对t单调不减这个条件来定义类S_0。

对于类S_1来说
$$P\{\xi_t>x\}=\frac{\bar F(t+x)}{\bar F(t)}\leq P\{\xi>x\}=\bar F(x),$$

因而对所有的t和$x\geq 0$存在$\bar F(t+x)\leq\bar F(t)\bar F(x)$的分布都属于类$S_1$。

对于类S_2来说
$$M\xi_t=\int_t^\infty \bar F(x)dx/\bar F(t).$$
单调不增，亦即$\lambda^*(t)=1/M\xi_t$单调不减。而函数$\lambda^*(t)$是对应于分布函数$1-\frac{1}{T}\int_0^t \bar F(x)dx$的故障率。而这个分布函数又是更新过程中的平稳剩余寿命的分布函数。因此，如果相应的平稳剩余寿命ξ^*属于类S_0，则变量ξ就属于类S_2。

最后，对于类S_3来说
$$M\xi_t=\frac{\int_t^\infty \bar F(x)dx}{\bar F(t)}\leq M\xi=T\quad 或\quad \bar F(t)\geq\frac{1}{T}\int_t^\infty \bar F(x)dx.$$

如果像上面一样，用ξ^*表示更新过程中的平稳剩余寿命，ξ是该过程相邻两点间的时间，那么只有当$\xi^*\underset{2}{\leq}\xi$时，变量$\xi$属于类$S_3$。

在可靠性理论中，最有意义的是类S_0，因为它有简单的物理意义——用故障率给出的部件的局部可靠性随时间是增长还是下降的。但是，正如下面将会看到的，有时采用其它老化分布类也是适宜的。首先，许多情形下证明随机变量属于其它类的属性比对类S_0的属性更简单。在可靠性理论中所采用的分布大多数是类S_0。用直接计算可以很容易地示出，指数分布、正态分布、当$p\geq 1$时的威布尔——格涅钦科分布以及$p\geq 1$的Γ分布都属于类S_0。统计资料表明，如果除去早期故障期外（见§1·2），那么对绝大多数部件来说，在剩下的时间里的故障率是单调不减的，即这类部件属于类S_0。类S_0关于随机变量的一系列运算是封闭的。如$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$是属于类S_0的随机变量，则

(а) $\eta_1=\xi_1+\cdots+\xi_n$;

(б) $\eta_2=\min(\xi_1,\cdots,\xi_n)$;

(в) $\eta_3=\varphi(\xi)$，式中$\varphi(x)$是上凸函数，都属于类S_0。如果补充一切变量$\xi_1,\cdots,\xi_n$同分布的条件，则

(г) $\eta_4=\max(\xi_1,\cdots,\xi_n)$也属于类$S_0$。

这些性质在可靠性理论中具有重要意义。通常，系统的寿命τ是组成系统的部件的寿命$\xi_1,\cdots,\xi_n$的某一函数。如果这些变量是独立的，并属于类S_0，而变量τ是由它们通过（а）、（б）、（в）和（г）的组合运算得到的，则系统的寿命τ也属于类S_0。

老化部件可靠性特征的估计 在可靠性理论中研究的可靠性特征往往是不以显式给出。这或者是由于问题复杂，或者是由于缺乏必要的原始信息。在这种情形下，自然要求求这

些特征的单侧或双侧估计。如果可靠性特征的增加对应着可靠性的提高，则称该特征为正特征。如可靠度函数$\bar{F}(t)$和平均寿命T具有正特征的；反之，故障率$\lambda(t)$和故障概率$F(t)$具有负特征，因为它们的增加对应着可靠性下降。设α具有正特征，这时用$\alpha \leqslant \bar{\alpha}$的估计叫做乐观估计；而用$\alpha \geqslant \underline{\alpha}$的估计叫做悲观估计。相应的，对于负特征的估计，应将不等式改成相反的不等式。换言之，乐观估计人为地使可靠性偏高，而悲观估计人为地使可靠性偏低。很明显，为了预测可靠性，我们基本上应用悲观估计。如果既找到了悲观估计，又找到了乐观估计，当然很好。因为可用来估计悲观估计的精度。

研究老化部件的主要意义在于利用老化类可获得可靠性特征的许多重要而简单的估计。在这些类中，从一定意义上说指数分布是极端的分布。在指数分布情形下，如果可靠性特征满足某一关系式$\Phi(\alpha,\beta,\cdots)=0$，则在老化分布类中它常变为不等式$\Phi(\alpha,\beta,\cdots)\geqslant 0$。

为了说明上述理论，现引用可靠性特征的某些最重要的不等式。这些不等式大都取自专著[10]。

例1　根据已知的平均寿命估计可靠度　设$\xi \in S_1$是部件的寿命，$\bar{F}(t)=\exp[-\Lambda(t)]$是可靠度函数，$T$是平均寿命。$\Lambda(t)$是下凸函数，因为$\lambda(t)=\Lambda'(t)$单调不减。现在来研究积分

$$T=\int_0^\infty t\,\mathrm{d}[1-e^{-\Lambda(t)}]=\int_0^\infty \varphi(x)e^{-x}\mathrm{d}x,$$

式中$t=\varphi(x)$是$\Lambda(t)$的反函数，是上凸的（其曲线在切线之下）。由此可得

$$T=\int_0^\infty \varphi(x)e^{-x}\mathrm{d}x\leqslant\int_0^\infty[\varphi(1)+\varphi'(1)(x-1)]e^{-x}\mathrm{d}x=\varphi(1).$$

亦即$\Lambda(T)\leqslant 1$。因为$\Lambda(t)$向下凸，所以分式$\Lambda(t)/t$单调不减，且当$t\leqslant T$时$\Lambda(t)/t\leqslant\Lambda(T)/T\leqslant 1/T$。由此可得

$$\bar{F}(t)=e^{-\Lambda(t)}\geqslant e^{-t/T}. \tag{1.46}$$

于是，得到了根据平均寿命估计可靠度函数下界的不等式。

例2　可靠度的插值法　常常需要在小的时间区间$(0,t_1)$上估计可靠度函数。即使是在大批部件的试验中，在这个小的一段时间里发生故障的部件数仍然可能不大，因此不可能十分精确地估计可靠度。但是，可以采用另一种方式——在大的时间区间$(0,t_2)$，$t_2\gg t_1$内试验部件，根据试验所观察的大量故障数据估计$\bar{F}(t_2)$，然后设法通过该量估计小的时间里的可靠度$\bar{F}(t_1)$。一般除得到不等式$\bar{F}(t_1)\geqslant\bar{F}(t_2)$之外，不可能再得到任何结论。现在，假设分布$F\in S_0$，于是

$$\bar{F}(t_1)=\exp\left[-\frac{\Lambda(t_1)}{t_1}t_1\right]\geqslant\exp\left[-\frac{\Lambda(t_2)}{t_2}t_1\right]=[\bar{F}(t_2)]^{t_1/t_2}. \tag{1.47}$$

现举一简单例子。设$t_1=5\text{h}$，$t_2=1000\text{h}$，按统计试验的结果已知$\bar{F}(t_2)\geqslant 0.7$，这时，$\bar{F}(t_1)\geqslant(0.7)^{5/1000}=0.9982\cdots$。

例3　老化分布的矩不等式　令

$$\mu_n=\frac{M\xi^n}{n!}=\int_0^\infty\frac{x^n}{n!}\mathrm{d}F(x)=\int_0^\infty\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\bar{F}(x)\mathrm{d}x.$$

假设$\xi\in S_0$，研究其变换差

$$a_{n+1}a_{n-1}-a_n^2=\int_0^\infty\int_0^\infty\left[\frac{x^n}{n!}\frac{y^{n-1}}{(n-1)!}-\frac{y^n}{n!}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\right]\lambda(y)\bar F(x)\bar F(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^\infty\int_0^\infty\left[\frac{y^n}{n!}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}-\frac{x^n}{n!}\frac{y^{n-1}}{(n-1)!}\right]\lambda(x)\bar F(x)\bar F(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{x^{n-1}}{n!}\frac{y^{n-1}}{(n-1)!}(x-y)[\lambda(y)-\lambda(x)]\bar F(x)\bar F(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

因为

$$(x-y)[\lambda(y)-\lambda(x)]\leqslant 0.$$

所以

$$a_{n+1}a_{n-1}\leqslant a_n^2. \tag{1.48}$$

不仅如此，由所得到的结论可以得出，若 $\xi\in S_0$ 且只要有一个 n 存在 $a_{n+1}a_{n-1}=a_n^2$，则 $\lambda(x)=\lambda=\text{const}$。因而，$\xi$ 的分布是指数分布。尤其是，当 $n=1$ 时，$M\xi^2\leqslant 2(M\xi)^2$，亦即

$$D\xi\leqslant(M\xi)^2 \quad 或 \quad \sigma\leqslant T. \tag{1.49}$$

此不等式可用于可靠性的统计理论中。在类S_0中，检验指数分布假设是很简单的，只要检验 $\sigma=T$ 就够了。根据试验结果估计出一、二阶矩就能检验这个等式。

可以用不等式（1.49）确定平均寿命的置信区间。假设对 n 个部件进行寿命试验，其寿命为 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$。根据中心极限定理，变量 $[(\bar\xi-T)/\sigma]\sqrt{n}$ 渐近于均值为 0 方差为 1 的正态分布，这里的 $\bar\xi=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i$。于是，

$$P\left\{\left|\frac{\bar\xi-T}{\sigma}\right|\sqrt{n}<x_\varepsilon\right\}=1-\varepsilon.$$

式中 x_ε 是从正态分布表查出来的。但是，对于 $\xi\in S_0$，存在 $\sigma\leqslant T$。于是又有

$$P\left\{\left|\frac{\bar\xi-T}{T}\right|\sqrt{n}<x_\varepsilon\right\}\geqslant 1-\varepsilon.$$

解关于 T 的不等式，可以得到置信度为 $1-\varepsilon$ 的平均寿命 T 的置信限不等式

$$\frac{\bar\xi}{1+x_\varepsilon/\sqrt{n}}\leqslant T\leqslant\frac{\bar\xi}{1-x_\varepsilon/\sqrt{n}}. \tag{1.50}$$

例4 根据已知的均值和方差估计可靠度函数 在例1中，已给出了根据平均寿命估计可靠度函数的方法。现在还知道方差，且像上面一样 $\xi\in S_0$。在专著[8]中对这种情形给出了可靠度函数 $\bar F(t)$ 的上、下限。这些估计满足很难求解的复杂方程，它们不能以显式解出。但是，看来作者没有注意到，在开始工作的阶段里 $\bar F(t)$ 的下限估计非常简单

$$\bar F(t)\geqslant\exp(-\alpha t/T), \qquad 当 t\leqslant\alpha t. \tag{1.51}$$

其中 α 由下述方程解出

$$\frac{\sigma^2}{T^2}=\frac{2\alpha-\alpha^2+2(1-\alpha)\ln(1-\alpha)}{\alpha^2}=\frac{\alpha}{3}+\frac{\alpha^2}{6}+\cdots+\frac{2\alpha^n}{(n+1)(n+2)}+\cdots;$$

$$\alpha=1-\frac{\sigma^2}{T^2}\alpha\left[\ln\left(\frac{1}{1-\alpha}\right)-\alpha\right]^{-1}.$$

不等式（1.51）引自专著[8]。它大致是这样得到的：下限估计为 $\bar F(t)=\exp[-q(t)]$，式

中$\varphi(t)$是直线族$y=A(u)t+B(u)$，$u\geq 0$的包络，随着u的增大，直线沿时针旋转，且当$u=0$和$u>0$时直线交点的横坐标随着$u\to 0$而趋于$t=aT$。由此得出结论，该线族的包络在区间[0，aT]上是直线$y=A(0)t+B(0)=at/T$。估计（1.51）式比（1.4）式本质上好得多，尤其是当方差小的情形更好。

例如，已知$T=300\text{h}$，$\sigma=100\text{h}$。此时$a=0.284$，则

$$\overline{F}(t)\geq\exp(-t/1050)，当 t<190\text{h}.$$

例5 剩余寿命不等式 现在来研究更新过程中的剩余寿命，设$\xi\in S_1$。于是

$$P\{\xi_t>x\}=\overline{F}(t+x)+\int_0^t\overline{F}(t+x-u)\mathrm{d}H(u)\leq\overline{F}(x)\overline{F}(t)+\int_0^t\overline{F}(x)\overline{F}(t-u)\mathrm{d}H(u)$$

$$=\overline{F}(x).$$

这样一来

$$\xi_t\leq\xi. \tag{1.52}$$

由此得出，对所有t：

$$\mathrm{M}\xi_t\leq\mathrm{M}\xi=T. \tag{1.53}$$

对于平稳剩余寿命可得到其它不等式。剩余寿命分布可写成

$$P\{\zeta>x\}=\exp\left[-\int_0^x\lambda_1(u)\mathrm{d}u\right].$$

其中$\lambda_1(x)=\overline{F}(x)\left(\int_x^\infty\overline{F}(t)\mathrm{d}t\right)^{-1}$。如果$\xi\in S_2$，则$\lambda_1(u)$单调不减，并且$\lambda_1(u)\geq\lambda_1(0)=1/T$。由此可得

$$P\{\zeta>x\}\leq e^{-x/T}.$$

将上、下限估计合并，便得出

$$1-x/T\leq P\{\zeta>x\}\leq e^{-x/T}. \tag{1.54}$$

例6 更新函数的估计 设$\xi\in S_1$。对恒等式$\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_{\nu(t)}=t+\xi_t$两端取数学期望，由瓦里德（Вальд）恒等式[43]可得

$$T[H(t)+1]=t+\mathrm{M}\xi_t.$$

根据（1.53）式，最终得到

$$t/T-1\leq H(t)\leq t/T. \tag{1.55}$$

下面，还可得到由老化部件组成的系统的可靠性特征的一些不等式。

第二章 极限定理

§2·1 某些随机变量对指数分布的收敛性

在§1·2中，曾阐述了在可靠性理论中应用指数分布模型的正确性，本节将研究随机变量收敛于指数分布的条件，并假定随机变量不是任意的，而是在可靠性课题中产生的。必须指出，本章所证明的大多数定理不仅给出了随机变量对分布模型的收敛性，而且还给出收敛速度的精确估计。

某些老化分布对指数分布的收敛性 这里除沿用§1·4的符号外，再引入几个符号。

$$R(t)=\frac{1}{T}\int_0^t\bar F(x)\mathrm{d}x;\quad \bar R(t)=1-R(t);\quad T=\int_0^\infty\bar F(x)\mathrm{d}x;\quad F(t)=P\{\xi<t\}.$$

如果随机变量$\xi\in S_3$，则$\bar F(t)\geqslant\bar R(t)$，$\bar R'(t)/\bar R(t)\leqslant -1/T$；积分便得到$\bar R(t)\leqslant e^{-t/T}$。由此不等式可得出结论：老化随机变量具有各阶矩。当$n\geqslant2$时，

$$m_n=\mathrm{M}\xi^n=\int_0^\infty t^n\mathrm{d}F(t)=n(n-1)T\int_0^\infty t^{n-2}\bar R(t)\mathrm{d}t\leqslant n(n-1)T\int_0^\infty t^{n-2}e^{-t/T}\mathrm{d}t=n!\,T^n,$$

其中 $\mathrm{M}\xi^2=m_2\leqslant 2T^2$。

记$\alpha=\alpha(\xi)=1-\mathrm{M}\xi^2/2T^2\geqslant0$。以下假定全部老化随机变量的均值都为1（对论证不失一般性）：$T=\mathrm{M}\xi=1$，$\bar R(t)=\int_t^\infty\bar F(x)\mathrm{d}x$，$\alpha=\alpha(\xi)=1-m_2/2$。

不等式的应用 对不同的老化随机变量，可用此不等式为α值（亦即，老化随机变量的一、二阶矩）估计分布函数$\bar F(x)$同指数分布之差，记作$\Delta(x)=\bar F(x)-\bar R(x)$。如果$F(x)\in S_3$，则

$$\Delta(x)\geqslant0,\quad \Delta(0)=\Delta(\infty)=0\quad 和\quad \int_0^\infty\Delta(x)\mathrm{d}x=1-\frac{1}{2}m_2=\alpha.$$

因为$\Delta(x)$左连续，并且$\Delta(x+0)\leqslant\Delta(x)$，所以函数在某一点$x=a$处达到最大值。记作

$$\Delta_0=\max_{x\geqslant0}\Delta(x)=\Delta(a).$$

辅助定理2.1 若$F\in S_3$，则对所有$x\geqslant0$，

$$\bar F(x)-e^{-x}\leqslant\Delta_0. \tag{2.1}$$

证明 解关于$\bar R(x)$的恒等式

$$\Delta(x)=\bar F(x)-\bar R(x)=-\bar R'(x)-\bar R(x),$$

便得到

$$\bar R(x)=e^{-x}+\int_0^x e^{-(x-t)}\Delta(t)\mathrm{d}t,$$

因此

$$\bar F(x)=e^{-x}+\Delta(x)+\int_0^x e^{-(x-t)}\Delta(t)\mathrm{d}t. \tag{2.2}$$

于是

$$\bar F(x)-e^{-x}\ [illegible]\ \Delta(x)\ [illegible]\ \Delta_0,$$

而另一方面

$$\bar{F}(x)-e^{-x} \geqslant -\int_0^x e^{-(x-t)} \Delta(t)dt \geqslant -\Delta_0\int_0^x e^{-(x-t)}dt \geqslant -\Delta_0,$$

证毕。

辅助定理2.2 若$F \in S_0$，则对所有$x \geqslant 0$存在

$$a \leqslant \bar{F}(x)-e^{-x} \leqslant 1-e^{-\Delta_0}. \tag{2.3}$$

证明 显然，对不等式左边

$$\bar{F}(x)-e^{-x} \geqslant -\int_0^x e^{-(x-t)} \Delta(t)dt \geqslant -\int_0^{\infty}\Delta(t)dt=-a.$$

为了证明右边的不等式，要应用契比雪夫[151]不等式。如果$G(x)$—分布函数，$\varphi(x)\geqslant 0$，$\Psi(x)\geqslant 0$，且$\varphi(x)$是非单调不增的，而$\Psi(x)$是非单调不减的，则

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\Psi(x)dG(x) \leqslant \int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)dG(x)\int_{-\infty}^{\infty}\Psi(x)dG(x). \tag{2.4}$$

若$\varphi(x)$、$\Psi(x)$是同向单调函数，即二者同为单调不增或单调不减函数，则不等式（2.4）的不等号改变方向。以上不等式是很容易得到的。在上述假设的条件下，只要将下述积分分解成和

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}[\varphi(x)-\varphi(y)][\Psi(x)-\Psi(y)]dG(x)dG(y),$$

则该积分保持符号不变。现在用分部积分法对（2.2）式积分，同时考虑到S_0类中始终有分布函数左导数（密度）存在，则可得到

$$\bar{F}(x)-e^{-x}=\int_0^x \Delta'(t)e^{-(x-t)}dt=\int_0^x \bar{F}(t)[1-\lambda(t)]e^{-(x-t)}dt,\ \lambda(t)=\frac{F'(t)}{\bar{F}(t)}.$$

如果$x \leqslant a$，则$\lambda(x)\leqslant 1$；而如果$x>a$，则$\lambda(x)>1$，其次，不难看出，在$x>a$时，最后的积分是递减的，所以，假定$x\leqslant a$，便可估算此积分。若将

$$\varphi(t)=e^{-(x-t)};\ \Psi(t)=\bar{F}(t)[1-\lambda(t)],$$

$$G(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ t/x, & 0\leqslant t\leqslant x;\\ 1, & x<t,\end{cases}$$

代入（2.4）式，在$[0,x]$上对x积分，便可得

$$\int_0^x \bar{F}(t)[1-\lambda(t)]e^{-(x-t)}dt \leqslant \frac{1}{x}\int_0^x \bar{F}(t)[1-\lambda(t)]dt\int_0^x e^{-(x-t)}dt=\Delta(x)\frac{1-e^{-x}}{x}.$$

但，$\Delta'(x)=\bar{F}(x)-f(x)$，由此得$\Delta(x)\leqslant x$。因为函数$(1-e^{-x})/x$是单调递减的，因此

$$\Delta(x)\frac{1-e^{-x}}{x} \leqslant 1-e^{-\Delta(x)} \leqslant 1-e^{-\Delta_0}.$$

证毕。

定理2.1 若$F \in S_0$，则对所有$x \geqslant 0$，

$$|\bar{F}(x)-e^{-x}| \leqslant \sqrt{2a} \leqslant \sqrt{1-\sigma^2}, \qquad \text{其中}\sigma^2=D\xi. \tag{2.5}$$

证明 令$x\leqslant x+h\leqslant a$，于是

$$\Delta(x+h)-\Delta(x)=\bar{F}(x+h)-\bar{F}(x)+\int_x^{x+h}\bar{F}(t)dt \leqslant \int_x^{x+h}\bar{F}(t)dt\leqslant h.$$

由此可见，(1) $a\geq\Delta(a)=\Delta_0$；(2) $\Delta(x)\geq\Delta(a)+x-a=\Delta_0+x-a$。但是，在此条件下

$$a=\int_0^\infty\Delta(x)\mathrm{d}x\geq\int_{a-\Delta_0}^{a}\Delta(x)\mathrm{d}x\geq\int_{a-\Delta_0}^{a}(\Delta_0+x-a)\mathrm{d}x=\frac{\Delta_0^2}{2}，所以\Delta_0\leq\sqrt{2a}。$$

再利用辅助定理2.1，便可得到所要证明的不等式，

$$|F(x)-e^{-x}|\leq\Delta_0\leq\sqrt{2a}.$$

证毕。

系1 设$\xi_n\in S_3$，$M\xi_n=1$，则$P\{\xi_n\geq x\}=\overline{F}_n(x)\to e^{-x}$的充分和必要条件是$a=a(\xi_n)\to0$。

实际上，由不等式(2.5)足以说明系1的正确性。同理，若$P\{\xi_n\geq x\}\to e^{-x}$，则

$$K_n(t)=1-\int_0^t\overline{F}_n(x)\mathrm{d}x\to e^{-x};$$

$$M\xi_n^2=2\int_0^\infty\overline{R}_n(t)\mathrm{d}t\to2\int_0^\infty e^{-t}\mathrm{d}t=2.$$

因为$\overline{R}_n(t)$有积分强函数$R_n(t)\leq e^{-t}$。

系2 在定理中，若取属于S_3类的均值为1的老化随机变量的任意值，则不等式(2.6)就变为

$$|P\{\xi>t\}-e^{-t/T}|\leq\sqrt{2-M\xi^2/T^2}\,. \qquad (2.6)$$

说明1 在类S_3中，当$a\to0$时，不等式(2.5)是渐近精确的。为说明这一点，下面来研究分布

$$F_1(x)=\begin{cases}1, & x\leq\varepsilon;\\ e^{-(x+\delta)}, & x>\varepsilon.\end{cases}$$

式中ε、δ由以下条件确定。

$$\int_0^\infty F_1(x)\mathrm{d}x=\varepsilon+e^{-\varepsilon-\delta}=1;\quad\int_0^\infty x\overline{F}_1(x)\mathrm{d}x=\frac{\varepsilon^2}{2}+(1+\varepsilon)e^{-\varepsilon-\delta}=\frac{m_2}{2}=1-a,$$

解此方程组还可解出$a=\varepsilon^2/2$，亦即$\varepsilon=\sqrt{2a}$。通过检验知，此分布属于类S_3：

$$F_1(x)=1\geq\overline{R}_1(x)，当x\leq\varepsilon;$$

$$F_1(x)=e^{-x-\delta}=\overline{R}_1(x)=\int_x^\infty e^{-t-\delta}\mathrm{d}t，当x>\varepsilon.$$

当$x=\varepsilon$时，$|F_1(x)-e^{-x}|$达到最大值。即

$$F_1(\varepsilon)-e^{-\varepsilon}=1-e^{-\varepsilon}\sim\varepsilon=\sqrt{2a}.$$

可以证明，对S_1和S_2类来说，不等式(2.5)也是正确的。亦即，$|\overline{F}(x)-e^{-x}|\leq C\sqrt{a}$。

说明2 对实际部件来说，在试车阶段不存在老化这一条件。这是因为，在大批同型产品中，常常有一小部分有缺陷的可靠性低的产品，在试验初期（即试车阶段）就发生故障。在这种情况下，可在一定程度上简单地认为部件无故障工作时间是两种分布的混合分布。

$$F(t)=(1-\delta)F_1(t)+\delta F_2(t).$$

式中 $F_1(t)$——正常部件的寿命分布；

$F_2(t)$——有缺陷部件的寿命分布；

δ——有缺陷部件的概率，一般很小。

因为正常部件的寿命远远大于有缺陷部件的寿命，所以$\bar F_2(t)\leqslant \bar F_1(t)$，亦即$\overline{F}(t)\leqslant \bar F_1(t)$。

设$F_1\in S_3$，记

$$T=\int_0^\infty \overline{F}(t)\mathrm{d}t;\quad T=(1-\delta)T_1+\delta T_2;\quad T_1=\int_0^\infty \overline{F}_1(t)\mathrm{d}t;\quad T_2=\int_0^\infty \overline{F}_2(t)\mathrm{d}t,$$

则

$$\frac{1}{T}\int_t^\infty \bar F(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{T}\int_t^\infty \bar F_1(x)\mathrm{d}x\leqslant \frac{T_1}{T}\bar F_1(t)\leqslant\frac{T_1}{T_1(1-\delta)}\bar F(t)\leqslant\frac{1}{(1-\delta)^2}\bar F(t).$$

这就导致类S_3的推广。如果$F\in S_3$，则对所有$x\geqslant 0$，存在

$$(1+\varepsilon)\overline{F}(x)\geqslant\frac{1}{T}\int_x^\infty \overline{F}(t)\mathrm{d}t.$$

利用证定理2.1的方法，不难证明对所有的$t\geqslant 0$，存在

$$|\bar F(t)-e^{-t/T}|\leqslant\sqrt{2\alpha+2\varepsilon+\varepsilon^2}\,. \tag{2.7}$$

定理2.2 若$F\in S$，则对任意$x\geqslant 0$，

$$|\bar F(x)-e^{-x}|\leqslant 1-\sqrt{1-2\alpha}=1-\sigma. \tag{2.8}$$

证明 进行分部积分，得

$$\alpha=\int_0^\infty[\bar F(x)-\bar R(x)]\mathrm{d}x=\int_0^\infty(a-x)[1-\lambda(x)]\bar F(x)\mathrm{d}x$$
$$=\int_0^a(a-x)[1-\lambda(x)]\bar F(x)\mathrm{d}x+\int_a^\infty(x-a)[\lambda(x)-1]\bar F(x)\mathrm{d}x.$$

利用不等式(2.4)，且假设第一个积分中

$$f(x)=a-x;\quad g(x)=1-\lambda(x);\quad G(x)=\frac{\int_0^x\overline{F}(t)\mathrm{d}t}{\int_0^a\overline{F}(t)\mathrm{d}t},$$

在第二个积分中

$$f(x)=x-a;\quad g(x)=\lambda(x)-1;\quad G(x)=\frac{\int_a^x\overline{F}(t)\mathrm{d}t}{\int_a^\infty\overline{F}(t)\mathrm{d}t}.$$

于是

$$\alpha\geqslant\frac{\int_0^a[1-\lambda(x)]\overline{F}(x)\mathrm{d}x\int_0^a(a-x)\bar F(x)\mathrm{d}x}{\int_0^a\bar F(x)\mathrm{d}x}+\frac{\int_a^\infty[\lambda(x)-1]\bar F(x)\mathrm{d}x\int_a^\infty(x-a)\overline{F}(x)\mathrm{d}x}{\int_a^\infty\bar F(x)\mathrm{d}x}$$

$$\geqslant\Delta_0\left[\frac{1}{R(a)}\int_0^a(a-x)\bar F(x)\mathrm{d}x+\frac{1}{\bar R(a)}\int_a^\infty(x-a)\bar F(x)\mathrm{d}x\right],$$

或者，将方括号中的式子变换一下，便得

$$\alpha\geqslant\Delta_0\frac{(1-a)R(a)-\int_0^a x\overline{F}(x)\mathrm{d}x}{R(a)\overline{R}(a)}.$$

将分式

$$\int_0^a x\bar F(x)\mathrm{d}x\left[\int_0^a \bar F(x)\mathrm{d}x\right]^{-1}=D(a)$$

对 a 求导数，不难证明该分式是单调的，因为

$$\int_0^a x\overline{F}(x)dx \Big/ \left[\int_0^a \overline{F}(x)dx\right]^2 \leqslant L(\infty)=1-\alpha,$$

在这种情况下

$$\int_0^a x\overline{F}(x)dx \leqslant (1-\alpha)R^2(a),$$

所以

$$\frac{(1-\alpha)R(a)-\int_0^a x\overline{F}(x)dx}{R(a)R(a)} \geqslant \frac{(1-\alpha)R(a)-(1-\alpha)R^2(a)}{R(a)R(a)}=1-\alpha.$$

这样，便得到不等式

$$\alpha \geqslant \Delta_0(1-\alpha) \quad 或 \quad \Delta_0 \leqslant \alpha/(1-\alpha).$$

现在，利用不等式（2.3），可得

$$F(x)-e^{-x} \geqslant -(1-\sqrt{1-2\alpha});$$

另一方面，

$$F(x)-e^{-x} \leqslant 1-e^{-\alpha/(1-\alpha)} \leqslant 1-\sqrt{1-2\alpha}.$$

最后的不等式不好理解，需证明。

$$e^{-\alpha/(1-\alpha)} \geqslant \sqrt{1-2\alpha} \quad 或 \quad e^{2\alpha/(1-\alpha)} \leqslant 1/(1-2\alpha).$$

首先，令 $\alpha/(1-\alpha)=x$。于是，所证的不等式变为 $e^{2x} \leqslant (1+x)/(1-x)$，而且 $x<1$，因为 $\alpha<1/2$。然后，将左右两边都展开成台劳级数，就很容易确信最后的不等式是正确的。证毕。

说明1 不等式（2.8）对类 S_0 是渐近精确的，为了说明这一点，现在来研究分布

$$F_0(x)=\begin{cases}0, & x<\varepsilon;\\ 1-e^{-\lambda(x-\varepsilon)}, & x\geqslant\varepsilon.\end{cases}$$

不难看出，此不等式属于类 S_0。因为

$$\lambda(x)=\begin{cases}0, & x<\varepsilon;\\ \lambda, & x\geqslant\varepsilon.\end{cases}$$

参数 λ 和 ε 由下列方程解出：

$$\int \overline{F}_0(x)dx=\varepsilon+\frac{1}{\lambda}=1, \quad \int x\overline{F}_0(x)dx=\frac{\varepsilon^2}{2}+\frac{1}{\lambda^2}+\frac{\varepsilon}{\lambda}=\frac{m_2}{2}=1-\alpha.$$

因此，$\varepsilon=1-\sqrt{1-2\alpha}$。对于这种分布，在 $x=\varepsilon$ 时，$\overline{F}_0(x)-e^{-x}$ 达到最大值，并等于 $1-e^{-\varepsilon}\sim\varepsilon$。

说明2 对于类 S_0 是任意分布的随机变量来说，不等式（2.8）为

$$|P\{\xi>t\}-e^{-t}| \leqslant 1-\sigma^2. \qquad (2.9)$$

说明3 可用一致估计量来估计老化分布同指数分布之间的差别，而用积分估计此差别更简单。例如，在度量 $\mathcal{R}_1$ 时，由（2.2）式得到

$$\int_0^\infty |\overline{F}(t)-e^{-t}|dt \leqslant \int_0^\infty \left[\Delta(t)+\int_0^t \Delta(x)e^{-(t-x)}dx\right] = 1-2\alpha.$$

由独立平稳流迭加的流收敛到泊松流的速度 现在举例说明上述不等式的应用。假设给出 n 个独立平稳普通流[3]，令 ξ_k 表示第 k 个质点与相邻质点间的时间间隔，则 $P\{\xi_k<x\}=$

$F_k(x)$，$M\xi_k=T_k$。众所周知，在这种情形下，从任意时刻至此流右侧最近点的时间ζ_k的分布为[153]

$$R_k(x)=P\{\zeta_k<x\}=\frac{1}{T_k}\int_0^x\overline{F}_k(t)\mathrm{d}t. \tag{2.10}$$

在§1.3中，曾给出更新过程公式，它对任意平稳普通流也是正确的。现在来研究这两个流迭加的情形，并用ξ表示相邻两点的时间间隔，ζ表示从任意时刻到此流右边最近点的时间。

令

$$P\{\xi<x\}=F(x);\quad M\xi=T;\quad P\{\zeta<x\}=R(x).$$

于是

$$\zeta=\min\zeta_k\text{，即}\quad\overline{R}(x)=\prod_{k=1}^{n}\overline{R}_k(x).$$

因为平稳流与普通流的迭加本身还是平稳流和普通流，所以对迭加流来说，（2.10）式是正确的。于是

$$\overline{F}(x)=-TR'(x)=T\sum_{k=1}^{n}\frac{\overline{F}_k(x)}{T_k}\prod_{i\neq k}\overline{R}_i(x). \tag{2.11}$$

若令此式中$x=0$，则得

$$T=\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{T_k}\right)^{-1}. \tag{2.12}$$

辛钦（Хинчин）已证明[153]，在某些条件下，随着流数目n的增加，此迭加流收敛于泊松流。这里，我们来研究对泊松流的收敛速度，同时认为所有分布F_k是老化类的。如果所有$F_k\in S_3$，则

$$\overline{F}(x)=T\sum_{k=1}^{n}\frac{\overline{F}_k(x)}{T_k}\prod_{i\neq k}\overline{R}_i(x)\geqslant T\sum_{k=1}^{n}\frac{\overline{R}_k(x)}{T_k}\prod_{i\neq k}\overline{R}_i(x)=\overline{R}(x).$$

亦即$F\in S_3$。

同样，如果所有$F_k\in S_0$，则可证明$F\in S_1$。对$n=2$的证明，从理论上讲并不难，但要证明故障率有导数，并证明它是非负数是极其繁琐的。为利用定理2.1和2.2的不等式，必须首先计算或估计α值

$$\alpha=1-\frac{1}{2}\frac{M\xi^2}{(M\xi)^2}=1-\frac{1}{T}\int_0^\infty\overline{R}(x)\mathrm{d}x.$$

假定$\xi\in S_3$，于是根据（2.12）式便得出

$$\alpha=1-\frac{1}{T}\int_0^\infty\prod_{k=1}^{n}\overline{R}_k(t)\mathrm{d}t=1-\frac{1}{T}\int_0^\infty e^{-x/T}\prod_{k=1}^{n}A_k(x)\mathrm{d}x.$$

式中　$A_k(x)=\overline{R}_k(x)e^{x/T_k}$。因为　$A_k'(x)=[\overline{R}_k(x)-\overline{F}_k(x)]/T_k\leqslant0$，所以，$A_k(x)\leqslant1$；进行分部积分，便得出

$$\alpha=-\sum_{k=1}^{n}\int_0^\infty A_k'(x)\prod_{i\neq k}A_i(x)\exp\left(-\frac{x}{T}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\int_0^\infty\frac{\overline{F}_k(x)-\overline{R}_k(x)}{T_k}\prod_{i\neq k}\overline{R}_i(x)\exp\left[-x\left(\frac{1}{T}-\frac{1}{T_k}\right)\right]\mathrm{d}x$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{T}{T-?}\int_0^\infty\frac{\overline{F}_k(x)}{T_k}\exp\left[-x\left(\frac{1}{T}-\frac{1}{T_k}\right)\right]\mathrm{d}x$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{T^{2}}{T_{k}T}\int_{0}^{\infty}\exp\left[x\left(\frac{1}{T}-\frac{1}{T_{k}}\right)\right]dF_{k}(x)$$

$$\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{T}{(T_{k}-T)T_{k}}\int_{0}^{\infty}\exp\left[-x\left(\frac{1}{T}-\frac{1}{T_{k}}\right)\right]dx=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{T}{T_{k}-T}\right)^{2}.$$

这样一来，便得到不等式

$$\alpha\leqslant\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{T}{T_{k}-T}\right)^{2}=\bar{\alpha}. \qquad (2.13)$$

不难证明，当$\bar{\alpha}\to0$时，下列不等式是渐近精确的。

$$|\bar{F}(x)-e^{-x/T}|\leqslant1-\sqrt{1-2\bar{\alpha}},\qquad 当所有F_{k}\in S_{0};$$

$$|\bar{F}(x)-e^{-x/T}|\leqslant\sqrt{2\bar{\alpha}},\qquad 当所有F_{k}\in S_{1}.$$

具有拉普拉斯有理变换式的随机变量极限定理（其定义和性质将在下节讲） 若系统的性态可以用有限状态齐次马尔科夫过程描述，则该系统的可靠性特征将是具有拉普拉斯变换式的随机变量（见第二章）。所以，很自然地可以找到随机变量分布收敛于指数分布的简单而有效的条件。下面引入几个模型和随机变量。

$$K_{0}=\left\{\xi:Me^{-z\xi}=\left[\prod_{k=1}^{n}(1+\alpha_{k}z)\right]^{-1}=(1+z+a_{2}z^{2}+\cdots+a_{n}z^{n})^{-1}\right\};$$

$$K_{1}=\{\xi:Me^{-z\xi}=(1+z+a_{2}z^{2}+\cdots+a_{n}z^{n})^{-1}\};$$

$$K_{2}=\left\{\xi:Me^{-z\xi}=\frac{1+b_{1}z+\cdots+b_{m}z^{m}}{1+a_{1}z+a_{2}z^{2}+\cdots+a_{n}z^{n}},\ a_{1}-b_{1}=1\right\}.$$

显然，除$K_{0}\subset K_{1}\subset K_{2}$外，对于所有这些随机变量都有$M\xi=1$。为方便起见，用$\xi_{0}\in K_{0}$表示指数分布随机变量，用$\xi_{n}\to\xi$表示弱收敛性，亦即分布函数收敛性。

定理2.3 若$\xi\in K_{0}$，$a_{2}<1/4$，则

$$\sup_{x\geqslant0}|P\{\xi>x\}-e^{-x}|\leqslant\frac{1-\sqrt{1-4a_{2}}}{1+\sqrt{1-4a_{2}}}. \qquad (2.14)$$

证明 比较z和z^{2}的系数，便得

$$\alpha_{1}+\cdots+\alpha_{n}=1,\quad \alpha_{1}^{2}+\cdots+\alpha_{n}^{2}=1-2a_{2}.$$

令
$$\alpha_{1}\geqslant\alpha_{2}\geqslant\cdots\geqslant\alpha_{n},\quad \alpha=\alpha_{2}+\cdots+\alpha_{n}=1-\alpha_{1}.$$

则从第二个方程可得

$$(1-\alpha)^{2}+\alpha^{2}\geqslant\alpha_{1}^{2}+\cdots+\alpha_{n}^{2}=1-2a_{2}.$$

因此

$$\alpha^{2}-\alpha+a_{2}\geqslant0.$$

因为$\alpha\leqslant2a_{2}<1/2$，所以解此不等式便得到

$$\alpha\leqslant(1-\sqrt{1-4a_{2}})/2. \qquad (2.15)$$

从随机变量ξ的拉普拉斯变换式可得出$\xi=\xi_{1}+\xi_{2}+\cdots+\xi_{n}$，式中$\xi_{k}$是独立的且$P\{\xi_{k}>x\}=e^{-x/\alpha_{k}}$。

$\overline{...}\,x_2+\cdots+x_n$。现在来研究差

$$\delta(x)=P(\cdots)-\cdots\frac{1}{\alpha_1}\int_0^x e^{\cdots}\Psi(t)dt.$$

因此

$$\delta(x)\cdots\frac{1}{\alpha}\int e^{\cdots}(t)dt\cdots\frac{1}{\alpha}\int\Psi(t)dt=\frac{M(\xi_1+\cdots+\xi_n)}{\alpha_1}=\frac{\alpha}{1-\alpha};$$

而从另方面看

$$\delta(x)\cdots e\cdots x(1-\alpha),$$

因此

$$\delta(x)\leqslant\alpha(1-\alpha).$$

将（2.15）式的上限代入消去α，定理便得到证明。

说明 ① 当$a_2\to0$时，（2.14）式右边$(1-\sqrt{1-4a_2})(\cdots+\sqrt{1-4a_2})\sim a_2$。② 当$x=\sqrt{\alpha}$时，$\delta\sqrt{x}$有$\delta(\sqrt{\alpha})\sim\alpha$。③依$\alpha_k$的方程组不难解出$\alpha$的下限估计为$\alpha\geqslant1-\sqrt{1-2a_2}\sim a_2$，因此可得出结论，当$a_2\to0$时

$$\alpha\sim a_2\quad\text{和}\quad\sup_{x\geqslant0}\delta(x)\sim a_2.$$

即，不等式（2.14）的渐近性没有改善。

定理2.4 设$\xi\in K_1$。ξ于$\xi\to\xi_0$的充要条件是

$$a_2=1-\cdots\to0.\tag{2.16}$$

证明 拉普拉斯变换的分母记作

$$P(z)=1+\cdots z+\cdots+a_nz^n=\prod_{k=1}^{m}(1+\alpha_kz+\beta_kz^2).$$

因为$P(z)$的所有根都在左半平面，所以$\alpha_k>0$、$\beta_k\geqslant0$。用反证法证明(2.16)式的必要条件。设$\xi\to\xi_0$，但$a_2\nrightarrow0$。因为$a_2\leqslant1/2$，可选择$\xi_k\to\xi_0$值的序列，对该序列$a_2=a_{2k}\to z>0$。而当$z>0$时，

$$Me^{-\xi_k z}=(1+z)\cdots\leqslant(1+z+az^2)^{-1},$$

并且在$k\to\infty$时求极限，于是

$$(1+z)\cdots\leqslant(1+z+az^2)^{-1}.$$

这个矛盾说明了定理的条件是必要条件。

现在，再设$a_2\to0$。比较z和z^2的系数便得出

$$\alpha_1+\cdots+\alpha_m=1,\quad\alpha_1^2+\cdots+\alpha_m^2=1+2(\beta_1+\cdots+\beta_m)-2a_2.$$

为不失一般性，可以认为$\alpha_1\leqslant\alpha_2\leqslant\cdots\leqslant\alpha_m$。令$\alpha=\alpha_2+\cdots+\alpha_m$，$\beta=\beta_1+\cdots+\beta_m$。由第二个方程可得出结论$\beta\leqslant a_2$；其次，$\alpha\cdots\geqslant\alpha_1^2+\cdots+\alpha_m^2\geqslant1-2a_2$，于是$\alpha\leqslant2a_2$，但是，当$z\geqslant0$时，

$$1+z\leqslant P(z)=\prod_{k=1}^{m}(1+\alpha_kz+\beta_kz^2)\leqslant\prod_{k=1}^{m}(1+\alpha_kz)(1+\beta_kz^2)$$

$$\leqslant(1+z)e^{\alpha z+\beta z^2}\leqslant(1+z)e^{2a_2z+a_2z^2}.$$

如果$a_2\to0$，则$P(z)\to1+z$，并且根据拉普拉斯变换连续性定理[149]知$\xi\to\xi_0$，亦即$P(\xi>x)\to e^{-x}$。定理证毕。

说明 丑·格尼斯（Гнеденко）用文献（ ）法[149]证明，对于$\xi\in K_1$和所有$x\geqslant0$，

存在

$$P\{\xi > x\} \quad \cdot\ (\ \quad 2\ .\tag{2.17}$$

式中C 10。

此估计的数量级不能再小了 不难相信若取 阶多项式作为$P(z)$，多项式的根在复平面的一条垂线上。

定理2.5 若$\xi \in K_2$，分母的幂是常数，$a_2 \to 0$和$b_1 \to 0$，则$\xi \to \xi_0$。亦即

$$P\{\xi > x\} \to e^{-x}.\tag{2.18}$$

证明 定理假设$a_2 \to 0$和$b_1 \to 0$；我们做相反的假设，$\xi \nrightarrow \xi_0$。因为$M\xi=1$，所以存在$\xi_k \to \hat{\xi} \neq \xi_0$的序列，但在这种情形下，

$$Me^{-z\xi_k} \to \hat{\varphi}(z) \neq 1/(1+z).$$

因为，如同定理2.4的证明一样，在$a_2 \to 0$时，$P(z) \to 1+z$，随机变量$\hat{\xi}$的拉普拉斯变换分子（假定此分子是有限幂多项式）有极限，此极限也是常数幂的多项式，且n 2，

$$\hat{\varphi}(z)=(1+\hat{b}_2 z+\cdots+\hat{b}_n z^n)/(1+z).$$

因为拉普拉斯变换在$z\to\infty$时是有限的，所以$\hat{b}_2=\cdots=\hat{b}_n=0$，亦即

$$\hat{\varphi}(z)=1/(1+z) \text{和} \hat{\xi}=\xi_0.$$

此结论同假设矛盾，于是证明了定理成立。

上述定理在第 章中应用。

§2.2 再生过程的极限定理

再生过程[78] 假设在某个概率空间确定偶 随机过程$\mu(t)$和它终止的时刻ξ，ξ。又设$\mu_1(t)$，ξ_1；$\mu_2(t)$，ξ_2；…；$\mu_n(t)$，$\xi_n(t)$；… —是**独立同分布偶**。如果$t_{n-1} \leq t < t_n$（其中$t_n=\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_n$，$t_0=0$），则过程$x(t)=\mu_n(t-t_{n-1})$叫做再生过程。时刻$t_n$叫做**再生时刻**，而间隔$[t_{n-1}, t_n]$叫做**再生周期**。换言之，在再生时刻过程忘记过去，重新开始，而且从时刻t_n开始计算的时间同从时刻$t=0$开始的时间服从同一分布。在可靠性理论的模型中，许多过程都是再生过程。所谓再生时刻，通常是指产品经修复达到初始状态的时刻。

假设在任意第n个再生周期$[t_{n-1}, t_n]$内的某一时刻$t_{n-1}+\eta_n$（$\eta_n<\xi_n$），事件A_n可能发生。在可靠性理论中，事件A_n一般是指产品发生故障。(ξ，偶、A_n，η_n)与序号n和其它再生周期中过程的状态无关。通常在实际任务中，事件A_n的发生是一个事件集（譬如，在再生周期内出现几次，则取其中的第一次）。

设τ表示事件A第一次出现的时刻。如果在序号为ν的再生周期内事件A第一次出现，则$\tau=t_{\nu-1}+\eta_\nu$。我们的任务就在于：①在一个再生周期上用过程$x(t)$的分布表示τ的分布；②研究在一个再生周期中，当事件A发生的概率趋于0时，τ值的渐近性。

拉普拉斯变换概述[149] 对于服从分布函数$F(x)$和密度为$f(x)$的非负随机变量将积分

$$\varphi(z)=L\xi=Me^{-\xi z}=\int_0^\infty e^{-zx}dF(x)=\int_0^\infty e^{-zx}f(x)dx,$$

叫做它的拉普拉斯变换。如果不把拉普拉斯变换的定义同随机变量联系起来，则后一积分叫

做函数$F(x)$的拉普拉斯变换。

依定义可很容易地得到以下特性：

① $L(f_1+f_2)=Lf_1+Lf_2$；

② $L(cf)=cLf$，c——常数；

③ $Lf'=-f(+0)+zLf$；

④ 令ξ_1和ξ_2——密度分别为$f(x)$、$g(x)$的独立随机变量。其和服从密度为$h(x)=\int_0^x f(x-t)g(t)\mathrm{d}t=f*g$（$*$——卷积运算）的分布，则其和的拉普拉斯变换等于

$$Me^{-z(\xi_1+\xi_2)}=Lh=L(f*g)=Lf\cdot Lg.$$

由这些特性可以看出：拉普拉斯变换能将复杂的函数运算（微分、卷积等）变换为较简单的运算（自变量的乘、乘积等）。变换Lf是一一对应的。即，由等式$Lf_1=Lf_2$可知$f_1=f_2$[149]。这就是说，存在逆变换$L^{-1}\varphi$。拉普拉斯变换理论证明，在某些条件下，拉普拉斯变换的反演式为

$$f(x)=L^{-1}\varphi=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(it)e^{itx}\mathrm{d}t. \tag{2.19}$$

可求出函数 $f(x)=\frac{x^n}{n!}e^{-\lambda x}$ 的拉普拉斯变换为

$$Lf=\int_0^{\infty}\frac{x^n}{n!}e^{-(\lambda+z)x}\mathrm{d}x=\frac{1}{(\lambda+z)^{n+1}}.$$

由此很容易得到有理分式的反演。设$Lf=P(z)/Q(z)$，式中 $P(z)$和$Q(z)$——多项式，且分子的幂小于分母的幂。将此分式展开成最简分式

$$\frac{P(z)}{Q(z)}=\sum_{k,s}\frac{A_{ks}}{(z+\lambda_k)^s}.$$

在这种情况下，因为逆变换也是线性的，所以

$$f(x)=L^{-1}\left[\sum_{k,s}\frac{A_{ks}}{(z+\lambda_k)^s}\right]=\sum_{k,s}A_{ks}L^{-1}\frac{1}{(z+\lambda_k)^s}=\sum_{k,s}A_{ks}\frac{x^{s-1}}{(s-1)!}e^{-\lambda_k x}. \tag{2.20}$$

还必须注意特殊情形。如果随机变量服从指数分布$f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$，则

$$Lf=\frac{\lambda}{\lambda+z}. \tag{2.21}$$

令 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$——随机变量序列；$F_1(x), F_2(x), \cdots, F_n(x)$——随机变量的分布函数序列；$\varphi_1(z), \varphi_2(z), \cdots, \varphi_n(z)$——随机变量的拉普拉斯变换序列。于是，下列定理成立。

连续性定理[140]

1. 如果分布函数序列$F_n(x)$在x的每一点上收敛于分布函数$F(x)$（$F(x)$在每一点上连续），则在任意z（$R_e z\geqslant 0$）时，

$$\varphi_n(z)\to\varphi(z) \quad 和 \quad \varphi(z)=\int_0^{\infty}e^{-zx}\mathrm{d}F(x).$$

2. 反之，如果对所有$z\geqslant 0$时，$\varphi_n(z)\to\varphi(z)$，且$\varphi(x)$在零点连续，则

$$F_n(x)\to F(x), \quad \text{和} \quad \varphi(z)=\int_0^\infty e^{-zx}dF(x).$$

应用此定理的第二部分，能很容易地证明非负随机变量的极限定理

事件首次发生时刻τ的精确分布 设$q=P(A_n)$，χ_n 事件A_n的状态变量。现在来研究ζ_n

$$\zeta_n=\xi_n(1-\chi_n)+\tau_n\chi_n.$$

在第n个再生周期内，如果事件A_n没有发生，则ζ_n等于该周期的长度，如果事件A_n发生了，则ζ_n等于该周期的起点到事件A_n发生的时刻之间的时间间隔。还要引入函数

$$\varphi_+(z)=Me^{-z\zeta_n}(1-\chi_n),\ \varphi_-(z)=Me^{-z\zeta_n}\chi_n,\ \varphi(z)=\varphi_+(z)+\varphi_-(z)=Me^{-z\zeta_n}.$$

在这种条件下

$$\begin{aligned}a(z)&=Me^{-z\tau}=Me^{-z\tau_1}\chi_1+Me^{-z\tau}(1-\chi_1)\\&=Me^{-z\tau_1}\chi_1+Me^{-z(\xi_1+\tau')}(1-\chi_1).\end{aligned}$$

式中τ'为从t_1时刻到事件A_n第一次发生的时间。因为τ'与t_1以前的过程$x(t)$状态无关，且与τ同分布，因此后一等式可写作

$$a(z)=\varphi_-(z)+\varphi_+(z)a(z) \quad \text{或} \quad a(z)=\frac{\varphi_-(z)}{1-\varphi_+(z)}=\frac{\varphi_-(z)}{1-\varphi(z)+\varphi_-(z)}. \tag{2.22}$$

由此，可很容易地求出均值

$$M\tau=-a'(0)=M\zeta/q=T/q. \tag{2.23}$$

(2.22) 式说明，τ的分布是用一个再生周期内过程的分布表示的。对于简单的过程，当然可求出函数$\varphi_+(z)$和$\varphi_-(z)$的显式，在这种情况下，拉普拉斯变换反演的问题也非常简单。另一方面，在可靠性理论问题中，在一个再生周期内，事件A_n发生的概率一般都很小。在此条件下，自然要研究当$q\to 0$时变量τ的渐近性，以便得到τ分布的简单近似表达式。

辛钦（Хинчин）收敛性 在证明极限定理之前，先引入并研究一个概念，即辛钦收敛性。

定义1 非负随机变量序列ξ_n，$M\xi_n>0$，如果对任意$x>0$，

$$\frac{1}{M\xi_n}\int_x^\infty \overline{F}_n(t)dt\to 0; \quad \overline{F}_n(t)=1-F_n(t)=P\{\xi_n\geq t\},$$

则$\xi_n\xrightarrow{x}0$，叫做**依辛钦收敛于零**。

以上是辛钦收敛的基本定义。下面再介绍辛钦收敛的另外两个等价的定义。

定义2 对任意$x>0$，

$$\xi_n\xrightarrow{x}0\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}\frac{1}{M\xi_n}\int_x^\infty tdF_n(t)\to 0.$$

定义3

$$\xi_n\xrightarrow{x}0\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}\frac{1}{M\xi_n}\int_0^\infty e^{-t}\overline{F}_n(t)dt\to 1.$$

现在证明这三个定义的等价性。首先

$$\int_x^\infty tdF_n(t)=x\overline{F}_n(x)+\int_x^\infty \overline{F}_n(t)dt.$$

所以，由定义2可得出基本定义1。另一方面，

$$\frac{1}{M\xi_n}\int_{x/2}^{x} \overline{F}_n(t)dt \geqslant \frac{1}{M\xi_n}\int_{x/2}^{x} \overline{F}_n(t)dt \geqslant \frac{x\overline{F}_n(x)}{2M\xi_n}.$$

如果基本定义正确，则 $x\overline{F}_n(x)/2M\xi_n \to 0$。但在这种情形下

$$\frac{1}{M\xi_n}\int_x t dF_n(t) \to 0,$$

亦即，定义也是正确的。设满足基本定义的条件，对于任意 $\varepsilon > 0$，同时从某一序号 n 开始，下式都成立。

$$1 \geqslant \frac{1}{M\xi_n}\int e^{-x}\overline{F}_n(x)dx \geqslant \frac{e^{-\varepsilon/2}\int_0^{\varepsilon/2}\overline{F}_n(t)dt}{M\xi_n} > 1-\varepsilon,$$

这就是说，可从基本定义导出定义3。反之，如果定义3正确，则对任意 $x > 0$

$$\frac{1}{M\xi_n}\int_x^{\infty}(1-e^{-t})\overline{F}_n(t)dt \geqslant \frac{1-e^{-x}}{M\xi_n}\int \overline{F}_n(t)dt,$$

亦即，基本定义是正确的

说明1 因为

$$\frac{1}{M\xi_n}\int_x \overline{F}_n(t)dt \geqslant 1-\frac{x}{M\xi_n},$$

所以，由 $\xi_n \xrightarrow{x} 0$ 得出 $M\xi_n \to 0$；否则，对某一序列 $M\xi_{n_k} \to a > 0$，而当 $x = a/2$ 时，我们就会陷于矛盾，从条件 $M\xi_n \to 0$ 和契比雪夫不等式 $P\{\xi_n > \varepsilon\} \leqslant M\xi_n/\varepsilon$ 可得出 $\xi_n \xrightarrow{P} 0$。这样以来，$\xi_n \xrightarrow{x} 0 \Longrightarrow \xi_n \xrightarrow{P} 0$。

但是，由不等式

$$\frac{1}{M\xi_n}\int_x^{\infty}\overline{F}_n(t)dt \leqslant \frac{\int_0^{\infty}t\overline{F}_n(t)dt}{xM\xi_n} = \frac{M\xi_n^2}{2xM\xi_n},$$

可以看出，$M\xi_n^2/M\xi_n \to 0$ 对辛钦收敛性来说是充分的。

于是，可写成以下关系

$$\frac{M\xi_n^2}{M\xi_n} \to 0 \Longrightarrow \xi_n \xrightarrow{x} 0 \Longrightarrow M\xi_n \to 0 \Longrightarrow \xi_n \xrightarrow{P} 0. \tag{2.24}$$

说明2 条件 $\xi_n \xrightarrow{x} 0$ 表示，在平稳再生过程中，相邻两再生时刻间的时间 ξ_n 依概率收敛于零。

说明3 如果记

$$\alpha_n = \frac{1}{M\xi_n}\int_0^{\infty}(1-e^{-x})\overline{F}_n(x)dx,$$

则定义3可写成

$$\xi_n \xrightarrow{x} 0 \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \alpha_n \to 0.$$

说明4 由于有不等式

$$C_1(1-e^{-x}) \leqslant 1-e^{-\lambda x} \leqslant C_2(1-e^{-x}),$$

$$C_1 = \min(1,\lambda),\ C_2 = \max(1,\lambda),$$

所以，在定义3中可用函数 $e^{-\lambda x}$ 代替函数 e^{-x}。

为了书写方便，下面将不写出随机变量的下标。用$\xi \xrightarrow{\gamma} 0$表示

$$\alpha(\xi) = \frac{1}{M\xi}\int_{\gamma}^{\infty}(1 - e^{-x}) F(x) dx \to 0.$$

辅助定理 现在再回到再生过程和上面引用的表示方法上来。

辅助定理2.3 如果再生过程$\kappa(t)$随$q\zeta / T \xrightarrow{\chi} 0$而变化，则$M\zeta\chi / M\zeta \to 0$。

证明

$$M\zeta\chi = M\zeta\chi\left\{\frac{q\zeta}{T} \geq x\right\} + M\zeta\chi\left\{\frac{q\zeta}{T} < x\right\} \leq M\zeta\chi\left\{\frac{q\zeta}{T} \geq x\right\} + xT, \quad T = M\zeta.$$

所以

$$\frac{M\zeta\chi}{T} \leq \frac{1}{M(q\zeta/T)}\int_{x}^{\infty} t d\Phi(t) + x.$$

式中 $\Phi(t) = P\{q\zeta/T < t\}$。

取任意$\varepsilon > 0$，并设$x = \varepsilon/2$，从某一时刻开始

$$\frac{1}{M(q\zeta/T)}\int_{\varepsilon/2}^{\infty} t d\Phi(t) < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ 即} \frac{M\zeta\chi}{T} < \varepsilon,$$

证毕。

说明 由证明可知，可以取任意其它随机变量代替辅助定理中的[illegible]值，特别是可以取ξ。

辅助定理2.4 若$q\zeta / T \xrightarrow{\chi} 0$，则$q\zeta / T_0 \xrightarrow{\chi} 0$。式中$T_0 = M\zeta$。

证明 首先，由条件$q\zeta / T_0 \xrightarrow{\chi} 0$可得到$M\zeta\chi / T_0 \to 0$。其次

$$M\zeta \geq M\zeta_{\gamma} \geq M\zeta(1 - \chi) = M\zeta - M\zeta\chi$$

亦即$T_0 \sim T$。因为，$P\{\zeta \geq x\} \leq P\{\zeta \geq x\}$，于是辅助定理证毕

极限定理

定理2.6

$$\lim_{q\zeta/T \to 0} P\{q\tau / T > x\} = e^{-x}. \tag{2.25}$$

证明 由式（2.22）得到

$$Me^{-\frac{q\tau}{T}z} = \frac{\varphi_{-}(qz/T)q^{-1}}{[1 - \varphi(qz/T)]q^{-1} + \varphi_{-}(qz/T)q^{-1}},$$

当$z \geq 0$时，依辅助定理知

$$0 \leq 1 - \varphi_{-}\left(\frac{qz}{T}\right)q^{-1} = M(1 - e^{-qz\zeta/T})q^{-1}\chi \leq z\frac{M\zeta\chi}{T} \to 0;$$

其次，有

$$\left[1 - \varphi\left(\frac{qz}{T}\right)\right]q^{-1} = \frac{1 - Me^{-qz\zeta/T}}{M(qz\zeta/T)} z \to z.$$

依辛钦收敛性的定义，可得

$$Me^{-\frac{q\tau}{T}z} \to (1 + z)^{-1}, \quad (q\zeta/T \to 0).$$

因此，根据拉普拉斯变换连续定理可得

$$P\{q\tau/T>x\}\to e^{-x}.$$

定理证毕。

系 如果

$$\frac{M(q\zeta/T)^2}{M(q\zeta/T)}=\frac{M\zeta^2q}{(M\zeta)^2}\to 0,$$

则由（2.24）式可得出$q\zeta/T \xrightarrow{x} 0$。并说明（2.25）式是正确的。

说明 假设已知$z>0$时，$\varphi_z(q\zeta/T)/q\to 1$，这就是说，从事件首次出现的再生周期的起点到事件发生时刻的时间间隔较变量τ很小，那么定理2.6的条件对（2.25）式收敛是充分必要的。这是根据无限可数随机变量理论得出的[149]。

定理2.6在具体应用时很不方便。因为ζ的分布相当复杂。而再生周期ξ的分布却简单得多。所以，用下述方法将定理2.6修正一下就很好用了。

定理2.7

$$\lim_{q\xi/T_0 \xrightarrow{x} 0} P\{q\tau/T_0>x\}=e^{-x}. \tag{2.26}$$

证明 根据辅助定理2.4(原文为2.2——译注)可由$q\xi/T \xrightarrow{x} 0$得到$q\zeta/T \xrightarrow{x} 0$，但是这样以来

$$P\{q\tau/T>x\}\to e^{-x}.$$

因为$T\sim T_0$，所以（2.26）是正确的。定理证毕。

系1 由（2.26）式知，如果

$$\frac{M(q\xi/T_0)^2}{M(q\xi/T_0)}=\frac{M\xi^2q}{(M\xi)^2}\to 0,$$

则$q\xi/T_0 \xrightarrow{x} 0$。所以，由条件$M\xi^2q/T_0^2\longrightarrow 0$知定理2.7的证明是正确的。

系2 如果过程$\kappa(t)$是平稳的，事件A是过程进入某一集合，并且此集只在极限状态转移中改变，则条件$q\xi/T_0 \xrightarrow{x} 0$可用条件$q\to 0$代替（当然，$T_0<\infty$）。因为，此时

$$\frac{1}{M(q\xi/T_0)}\int_x^\infty P\left\{\frac{q\xi}{T_0}>t\right\}dt=\frac{1}{T_0}\int_{T_0x/q}^\infty P\{\xi>u\}du\to 0.$$

所以，变量ξ的分布仅仅由过程$\kappa(t)$决定，而且$q\to 0$。

说明1 已证明的极限定理具有一致性。在极限状态中，不管怎样，过程$\kappa(t)$和事件A都可任意改变。正是由于这些定理具有这种一致性，因此要求$q\zeta/T$和$q\xi/T_0$依概率收敛于0比$q\to 0$快。从这些条件中的每一条都可得出结论：$q\to 0$；但是，相反的条件就不正确。一致性极限定理便于使用的原因：首先，应用范围较广；其次，这些定理的条件表明，在怎样的"病态"条件下会破坏分布的收敛性，亦即若不满足定理的条件，就不能应用相应的近似式。

说明2 为应用所获得的极限定理估计变量τ的分布，应该估计收敛速度。为此，要利用艾谢（Эссен）法[149]。此时

$$\sup_{x\geq 0}\left|P\left\{\frac{q\tau}{T}>x\right\}-e^{-x}\right|\leqslant C\frac{M\zeta^3}{(M\zeta)^3}q.$$

但是，用艾谢法得到的系数C的估计是近似的。当用于简单的个别场合时，C的估计值会较

精确值高10～15倍。下面将研究在可靠性理论和排队论中都很重要的再生过程，对这些过程可求出其误差的精确估计。

§ 2·3 特殊再生过程

特殊再生过程不等式 现在来研究可靠性理论和排队论中经常出现的一种模型——再生过程。其特点如下：再生周期由互相独立的两部分组成，第一部分ξ_n服从指数分布$P\{\xi_n \geqslant x\} = e^{-\lambda x}$，第二部分$\eta^0_n$服从均值为$M\eta^0_n = T_0$的任意分布。事件$A_n$只能在再生周期的第二部分发生，并且同此部分以外的过程状态无关。令η^-_n——第n个再生周期中从第二部分开始到事件A_n发生的时间，令η^+_n——事件A_n不发生的条件下第n个再生周期第二部分的长度，若令χ_n——事件A_n的状态变量，则$\eta_n = \eta^+_n(1-\chi_n) + \eta^-_n\chi_n$。再令

$$M\chi_n = P\{A_n\} = q, \quad p = 1-q,$$

$$T_0 = M\eta^0_n, \quad T_+ = M\eta^+_n, \quad T_- = M\eta^-_n,$$

$$T = M\eta_n = T_+ p + T_- q, \quad T_1 = T_+ p, \quad T_2 = T_- q.$$

显然，事件A首次发生前的时间τ为

$$\tau = \xi_1 + \cdots + \xi_\nu + \eta^+_1 + \cdots + \eta^+_{\nu-1} + \eta^-_\nu.$$

式中 ν——事件A首次发生的再生周期的序号。此值服从几何分布$P\{\nu = n\} = qp^{n-1}$，$n = 1, 2, \cdots$。记

$$\xi = \xi_1 + \cdots + \xi_\nu, \quad \eta = \eta^+_1 + \cdots + \eta^+_{\nu-1} + \eta^-_\nu.$$

于是，$\tau = \xi + \eta$。不难证明，变量ξ服从指数分布，$P\{\xi \geqslant t\} = e^{-\lambda q t}$。

又令η_t——$\xi = t$的条件下的随机变量η。不难证明随机变量η_t的分布为

$$P\{\eta_t \geqslant x\} = \bar{F}_t(x) = 1 - F_t(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(x) \frac{(\lambda p t)^n}{(n-1)!} e^{-\lambda p t}. \tag{2.27}$$

式中 $\Phi_n(x) = P\{\eta^+_1 + \cdots + \eta^+_{n-1} + \eta^-_n \geqslant x\}$。对$t$求导数，便得

$$\frac{d}{dt}\bar{F}_t(x) = \lambda p \sum_{n=1}^{\infty} [\Phi_{n+1}(x) - \Phi_n(x)] \frac{(\lambda p t)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda p t}.$$

因为 $\Phi_{n+1}(x) \geqslant \Phi_n(x)$，所以$\bar{F}_t(x)$对$t$单调递增。解出均值为

$$M\eta_t = \sum_{n=1}^{\infty} [(n-1)T_+ + T_-] \frac{(\lambda p t)^n}{(n-1)!} e^{-\lambda p t} = \lambda p t T_+ + T_- = \frac{T_1 \lambda q t + T_2}{q}. \tag{2.28}$$

于是，对变量τ分布的精确估计式证毕。

定理2.8 对任意$t \geqslant 0$，不等式

$$e^{-\lambda q t} \leqslant P\{\tau \geqslant t\} \leqslant e^{-\lambda q t} + \lambda T \leqslant e^{-\lambda q t} + \lambda T_0 \tag{2.29}$$

成立。

证明 τ的下限估计式为

$$P\{\tau \geqslant t\} = P\{\xi + \eta \geqslant t\} \geqslant P\{\xi \geqslant t\} = e^{-\lambda q t}.$$

将τ的分布写成

$$P\{\tau \geqslant t\} = e^{-\lambda q t} + \int_0^t \lambda q e^{-\lambda q x} \bar{F}_x(t-x) dx,$$

下面再来估计上式的第二项。

$$J=\lambda q\int_0^t e^{-\lambda qx}\overline{F}_x(t-x)dx=\lambda q\int_0^a e^{-\lambda qx}\overline{F}_x(t-x)dx+\lambda q\int_a^t e^{-\lambda qx}\overline{F}_x(t-x)dx.$$

首先，要估计上式最后的和的第一项，就要用契比雪夫不等式。则

$$\int_0^a \lambda q e^{-\lambda qx}\overline{F}_x(t-x)\,dx\leqslant\int_0^a \lambda q e^{-\lambda qx}\frac{M\eta_x}{t-x}\,dx$$

$$=\int_0^a \lambda q e^{-\lambda qx}\frac{T_1\lambda qx+T_2}{q(t-x)}dx=\lambda\int_0^a e^{-z}\frac{T_1z+T_2}{w-z}dz,$$

式中 $a=\lambda qa$，$w=\lambda qt$，而积分变量 $z=\lambda qx$。然后，估计第二项的积分

$$\int_a^t \lambda q e^{-\lambda qx}\overline{F}_x(t-x)dx\leqslant\lambda q e^{-\lambda qa}\int_a^t \overline{F}_x(t-x)dx$$

$$\leqslant\lambda q e^{-\lambda qa}\int_0^\infty\overline{F}_t(u)du=\lambda e^{-\lambda qa}(T_1\lambda qt+T_2)=\lambda e^{-a}(T_1w+T_2).$$

这样以来

$$J\leqslant\lambda\left[\int_0^a e^{-z}\frac{T_1z+T_2}{w-z}dz+e^{-a}(T_1w+T_2)\right],\quad 0\leqslant a\leqslant w.$$

如果$w\leqslant1$，则认为$a=0$。于是

$$J\leqslant\lambda(T_1+T_2)=\lambda T.$$

如果$w>1$，则假设$a=w-1$。对w求导数，得

$$\left[\int_0^{w-1} e^{-z}\frac{T_1z+T_2}{w-z}dz+e^{-(w-1)}(T_1w+T_2)\right]_w'=-\int_0^{w-1} e^{-z}\frac{T_1z+T_2}{(w-z)^2}dz\leqslant0.$$

由此可得出结论：此函数在$w=1$时取最大值。亦即，对任意$w>1$，$J\leqslant\lambda(T_1+T_2)=\lambda T$。这样以来，对任意$t$，$J\leqslant\lambda T$。因为总是有$\eta_n(w)\leqslant\eta_n^0(w)$，所以$T\leqslant T_0$，这说明，$J\leqslant\lambda T_0$。定理证毕。

系

$$\lim_{\lambda T\to0}P\{\lambda q\tau>x\}=e^{-x}.\tag{2.30}$$

说明1 对于所有的特殊再生过程，上限估计（2.29）式不能渐近改善。这就是说

$$\sup_{x^*}\frac{\sup[P\{\tau>t\}-e^{-\lambda t}]}{\lambda T}\xrightarrow[\lambda T\to0]{}1.\quad（原文x^*为x）$$

为了证明这一点，取$\lambda=1$，$\eta_n^+=0$，$\eta_n=T$ $=$const的过程。于是，$\tau=\eta_n=T$，并且与$\zeta=\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_\nu$和$T_1=qT$无关，令$t=\sqrt{T}$，在这种情况下，

$$P\{\tau>\sqrt{T}\}-e^{-q\sqrt{T}}=\int_0^{\sqrt{T}} qe^{-qx}F(\sqrt{T}-x)dx.$$

式中

$$F(x)=P\{\eta_n>x\}=P\{\eta>x\}=\begin{cases}1, & x<T;\\ 0, & x>T.\end{cases}$$

如果 T [illegible] <1和q [illegible]，则

$$q\sqrt{T}\to0和P\{\tau>\sqrt{T}\}-e^{-q\sqrt{T}}\sim q\int_0^{\sqrt{T}}\overline{F}(\sqrt{T}-x)dx=qT=T_1.$$

但

$P\{\tau>t\}$ [illegible] e^{-t} [illegible] T_1，

因而，当$T\to 0$时，此过程有

$$\sup_{t>0}[P\{\tau>t\}-e^{-t}]T^{-1}\to 1.$$

说明2 定理2.8给出τ的精确分布与指数分布之差的一致估计。有趣的是得到了与自变量有关的估计。在证明定理的过程中，在具有一阶矩的条件下，得到了假定事件第一次出现时刻τ分布的估计

$$P\{\tau>t\}-e^{-\lambda qt}\leqslant \lambda\left[e^{[illegible]}(T_1w+T_2)+\int^{[illegible]} e^{[illegible]}\frac{T_1z+T_2}{w-z}\,dz\right].$$

从根本上改变这种估计是不可能的。但是，在更强的条件下，可得到较为简单而较精确的上一致估计。为此，引入记号如下：

$$\varphi_+(z)=Me^{z\eta_n^+},\quad \varphi_-(z)=Me^{z\eta_n^-},\quad \varphi(z)=Me^{z\eta_n}=p\varphi_+(z)+q\varphi_-(z),$$

$$\Psi_+(z)=\frac{\varphi_+(z)-1}{z},\quad \Psi_-(z)=\frac{\varphi_-(z)-1}{z},\quad \Psi(z)=\frac{\varphi(z)-1}{z}=p\Psi_+(z)+q\Psi_-(z).$$

在这种条件下，由（2.27）式可得到

$$Me^{z\eta_\tau}=\sum_{n=1}^{\infty}q\varphi_-(z)\varphi^{n-1}(z)\frac{(\lambda pt)^{n}}{(n-1)!}e^{-\lambda t}=[illegible]$$

再引入记号，

$$\Delta_+=\lambda p\Psi_+(\lambda q),\quad \Delta_-=\lambda q\Psi_-(\lambda q),$$

$$\Delta=\Delta_++\Delta_-=\lambda\Psi(\lambda q),\quad \Delta_1=(Me^{\lambda q\eta_n}-1)q^{-1}=\Delta.$$

定理2.9 如果 $Me^{\lambda q\eta_n}<\infty$，则

$$e^{-\lambda qt}\leqslant P\{\tau>t\}\leqslant(1+\Delta_-)e^{-\lambda q t(1-\Delta_+)},\quad t>0. \tag{2.31}$$

证明

$$P\{\tau>t\}=e^{-\lambda qt}+\lambda q\int e^{[illegible]}\overline{F}_{[illegible]}(x)dx\leqslant e^{-\lambda qt}+\lambda qe^{-\lambda qt}\int e^{\lambda qx}\overline{F}_{[illegible]}(x)dx$$

$$=e^{-\lambda qt}\int e^{\lambda qx}d_x\overline{F}[illegible]=e^{-\lambda qt}Me^{[illegible]}.$$

最后的结果是用分部积分法得到的。此积分是存在的，因为$\varphi(\lambda q)$存在，因而有$\varphi_-(\lambda q)$和$\varphi_+(\lambda q)$存在。将$Me^{\lambda q\eta}$的表达式代入上式，便得

$$P\{\tau>t\}\leqslant e^{-\lambda qt}\varphi_-(\lambda q)e^{\lambda pt[\varphi_+(\lambda q)-1]}=(1+\Delta_-)e^{-\lambda qt(1-\Delta_+)}.$$

定理证毕。

系 若固定$\Delta=\Delta_++\Delta_-$，并依自变量Δ_+求（2.31）式右端的最大值，便很容易地得出

$$P\{\tau>t\}\leqslant\begin{cases}(1+\Delta)e^{-\lambda qt}, & \lambda qt\leqslant\dfrac{1}{1+\Delta},\\[2mm] \dfrac{1}{\lambda qt}e^{[illegible]}, & \dfrac{1}{1+\Delta}<\lambda qt\leqslant 1,\\[2mm] e^{[illegible]}, & \lambda qt>1.\end{cases} \tag{2.32}$$

因为$\Delta<\Delta_1$，所以当用Δ_1代替Δ时，这些不等式仍然是正确的。在“[illegible]”下，Δ_1近似等于λT_0，记作$\Delta_0=\lambda T_0$，并且在此情况下，（2.32）式可变为[illegible]形式

$$P\{\tau > t\} \leqslant \begin{cases} (\cdot + \lambda T_0 e^{-\lambda q} , & \lambda qt < 1, \\ e^{\ldots} , & \lambda qt \geqslant 1. \end{cases} \tag{2.33}$$

（这里，我们忽略了无关紧要的过渡阶段$1/(1+\lambda_0) \leqslant \lambda qt < 1$，因为该不等式总是渐近的）。

概率q的估计 如果要估算或相当精确地估算概率q，可以利用不等式(2.31)和(2.33)。显然，对任何特殊再生过程来说，这是不可能做到的。因为我们没有再生周期第二部分过程性态的任何信息。但是，对于可靠性理论和排队论的模型来说，常常发生一种重要的再生过程，它能给出对概率q的估计。

现在来研究有限状态集或可数状态集的过程，并用符号$E=\{0,1,2,\cdots,n,\cdots\}$表示状态集。假设此集是偏序的，而且状态0是唯一最小的状态。此有序性用$i<j$表示（不应同R有序性混淆——它同这里引用的有序性无任何关系）。现将状态集E分为两个不相交的子集，$E=E_+ \cup E_-$，而且满足以下条件：

(1) 有限性，即$0 \in E_+$，$|E_+| < \infty$（E_+集是有限的）；

(2) 单调性[6]，即由$i \in E_-$和$i < j$得出$j \in E_-$。

在可靠性理论模型中，第一个条件不需说明；第二个条件（E_+——系统正常状态集，E_-——系统故障状态集。过程向上突变，相当于系统中的部件由正常状态转移为故障状态；过程向下突变，相当于系统中部件由故障状态经维修变为正常状态）说明了处于故障状态的系统因其部件发生故障而不可能使系统变为正常状态。

假设状态集E的随机过程$\kappa(t)$，当$t \geqslant 0$时满足以下条件：

① 对任意i和j，$i < j$，都存在

$$P\{\kappa(t+h) = j \mid \kappa(t) = i \mid \kappa(x),\ 0 \leqslant x < t\}$$
$$= P\{\kappa(t+h) = j \mid \kappa(t) = i\} = \lambda_{ij} h + o(h);$$

② 对任意$i \in E_+$，$0 < \sum_{\nabla i} \lambda_{ij} = \lambda_i < \infty$，（下标$\nabla$应为$j>i$——译注，下同）

③ 当利用排队论的术语时，把$\kappa(t)=0$的区间叫做闲期，把$\kappa(t)>0$的周期叫做忙期。在这种条件下，对于任意i和j（$i>j$），概率

$$P\{\kappa(t+h) = j \mid \kappa(t) = i \mid \kappa(x),\ 0 \leqslant x < t\}.$$

仅仅决定于从进入忙期的时刻t到时刻$t+h$的时间里过程的轨迹。

这种随机过程叫做马尔科夫向上过程。由此定义可得出结论，过程进入0状态的时刻是再生点，而闲期服从参数为λ_0的指数分布，且同忙期无关。所以，马尔科夫向上过程是我们上面研究过的特殊再生过程。如果忙期具有有限均值，则根据斯米特定理[78]知此过程为各态历经过程。我们用$P_i = \lim_{t \to \infty} P\{\kappa(t) = i\}$，$i \in E$表示过程的平稳概率。

设事件A是过程进入E_-集。从忙期开始到进入E_-集的时刻前忙期所经历的状态序列叫做路。记作

$$\pi = \{0, i_1, i_2, \cdots, i_m\},\quad i_1 \in E_+, \cdots, i_{m-1} \in E_+,\quad i_m \in E_-,$$

所有这些路的集合记作Π。如果$0 < i_1 < i_2 < \cdots < i_m$，则所有这些路是单调路。所有单调路的集合记作$\Pi_0$。

设$q(\pi)$是在忙期内发生事件A，且经历路π的概率。在这种情况下，显然有$q = \sum_{\pi \in \Pi} q(\pi)$。我们用$q_0 = \sum_{\pi \in \Pi_0} q(\pi)$表示事件$A$沿单调路发生的概率。单调路数目是有限的（因为集

E_+是有限的），在具体问题中，概率q一般可用此式计算，这样给出的概率q是下限。为了求概率q的上限，现在来研究事件A发生的时刻流，即满足$\kappa(x_n-0)\in E_+$，$\kappa(x_n+0)\in E_-$的时刻x_n的流。

令Λ表示平稳流的强度。对于马尔科夫间断过程来讲，Λ可用过程的平稳概率表示为

$$\Lambda=\sum_{i\in E_-}\sum_{j\in E_+}p_j\lambda_{ji}.$$

现在来研究这个流的子流。假定事件A只能在正期的第一部分发生。令Λ_0表示子流的平稳强度，$\Lambda_0\leqslant\Lambda$。显然，该子流的强度等于事件$A$在正期开始时流的强度：$p_0\lambda_0q=\Lambda_0\leqslant\Lambda$。这样一来，就得到$q$的上限。若将此估计同以上所得到的估计合并，最后可求得

$$q_0\leqslant q\leqslant\frac{1}{\lambda_0p_0}\sum_{i\in E_-}\sum_{j\in E_+}\lambda_{ji}=\bar{q}. \tag{2.34}$$

对于这种类型的许多过程来说，用上下限估计，或平稳概率p_i估计，都比估计q方便得多。在这种情况下，不等式（2.34）可能给出此概率，再与此式（2.31）～（2.33）联立便能有效地估计出变量τ的分布。

在可靠性工程中，我们所关心的往往不是τ的分布，而是关心其均值。由（2.31）式知，此均值为

$$M\tau=\frac{\lambda_0^{-1}+M\tau_n}{q}=\frac{1+\lambda_0M\eta_n}{\lambda_0q}.$$

式中

$$M\tau_n\leqslant M\eta_n^0=\frac{1}{\lambda_0}\left(\frac{1}{p_0}-1\right).$$

因此，利用（2.34）式便可得到均值的双侧估计

$$1/\lambda_0\bar{q}\leqslant M\tau\leqslant 1/(\lambda_0p_0q_0) \tag{2.35}$$

下面，用几个简单的例子来说明在可靠性理论问题中怎样应用前两节证明的极限定理。此定理在较难一些问题中的应用将在第三章中介绍。

例1　非工作贮备系统。 假设用可靠性相同的两个部件组成的系统，各部件无故障工作时间都服从任意分布$F(x)$，在时刻$t=0$开始工作。当第一个部件能正常工作时，第二个部件处于贮备状态（非工作贮备）。当第一个部件发生故障时，立即送修，修复时间的分布函数为$G(x)$；同时，第二个部件马上接替工作。第一个部件更新后便处于贮备状态。同样，第二个部件工作一段时间也会发生故障，也要立即送修更新和进入贮备。要求每次维修都要达到更新水平，即修复后的部件无故障工作时间同新部件的一样，且分布相同。所谓系统发生故障的时刻，是一部件发生故障，同时另一部件还处于维修状态的时刻。如果将第一个部件无故障工作开始的时间除外，则随机过程$\kappa(t)$（$\kappa(t)$为t时刻前部件的故障数）是再生过程，而再生时刻是过程的状态由1变为0的时刻。系统的故障过程是过程进入状态2。按定理2.6的符号中，ζ_k服从分布$F(x)$。因为在部件的故障时刻，或者是再生时刻，或者是系统发生故障的时刻。在一再生周期里，系统发生故障的概率q为

$$q=\int_0^\infty\overline{G}(t)dF(t),\ \overline{G}(t)=1-G(t),\ M\zeta_k=\int_0^\infty tdF(t)=T.$$

可以很容易求出变量τ的拉普拉斯变换。但是，一般来说，由于不能将拉普拉斯变换反演为

量式，因此不宜用某变换来研究，而应用定理2.6来研究。若分布F和G的变化，使$q\bar{\zeta}/T\xrightarrow{x}0$，则$P\{q\tau/T>x\}\to e^{-x}$，亦即有近似公式$P\{\tau>t\}\approx e^{-qt/T}$存在。

可以估计出q值。再假设修复时刻依概率收敛于零，而分布的改变使密度有界：$f(x)=F'(x)\leq C$，$f(0)>0$，并且在0点也连续。后者表示对任意$\varepsilon>0$，可求出同F无关的$\delta(\varepsilon)$，此值对所有$x(0<x<\delta)$，满足$f(x)-f(0)<\varepsilon$。

现在来研究并估计差 $\Delta=(q-f(0)T_1)/T_1$（式中 $T_1=\int_0^\infty t\,dG(t)$）：

$$\Delta<\int_0^{\delta(\varepsilon)}\frac{f(t)-f(0)}{T_1}\bar{G}(t)dt+\int_{\delta(\varepsilon)}^{\infty}\bar{G}(t)\frac{f(t)-f(0)}{T_1}dt$$

$$<\frac{\varepsilon}{T}\int_0^\infty\bar{G}(t)dt+\frac{C}{T}\int_{\delta(\varepsilon)}^{\infty}\bar{G}(t)dt.$$

因为修复时间依概率收敛于零，所以从某时刻开始，$1/T\int_{\delta(\varepsilon)}^{\infty}\bar{G}(t)dt<\varepsilon/C$，此时 $\Delta<2\varepsilon$。由于ε是任意小的，所以$q\sim f(0)T_1/T$。最后，我们得到非常简单的近似公式

$$P\{\tau>t\}\approx\exp\left[-\frac{f(0)T_1}{T}t\right].$$

例2　有预防维修的热贮备系统　假设由两个部件组成的热贮备系统，部件工作时故障率为λ，贮备时故障率为λ_1（$\lambda_1<\lambda$）。当工作部件发生故障时，就自动接通贮备部件，且该部件的故障率变为λ。假设进行预防维修的周期为h，维修时用新部件更换故障部件，瞬时完成。设工作部件发生故障符合即发现，而贮备部件的故障概率为p。如果在预防维修周期中的某一时刻t_{n+1}（$t_n<t_{n+1}<t_n+h$）发现了故障，则在此时刻t_{n+1}进行预防维修，且规定下一次预防维修时刻为$t_{n+1}+h$；如果在（t_n，t_n+h）里没有发现故障，则在t_n+h时刻进行预防维修。所谓系统发生故障的时刻是在预防维修周期里贮备部件发生故障而未发现，且工作部件发生故障的时刻。

现在来找出这种系统首次故障时刻的分布。如上所述，若令$\kappa(t)$表示到时刻t前的部件故障数，则再生时刻就是预防维修时刻。这时ζ_n……。因为系统的故障时刻就是部件都故障的时刻。在预防维修的周期里，系统发生故障的概率

$$q=\int_0^h\lambda e^{-(\lambda+\lambda_1)x}(1-p)[1-e^{-\lambda(h-x)}]dx.$$

假设$\lambda h\to 0$，即在预防维修周期中部件发生故障的概率很小。在这种情况下，不难证明 $q\sim(1-p)\lambda\lambda_1h^2/2$。可以指出，当$\lambda h\to0$时，能满足定理2.6的条件。

设事件B表示在时间间隔为t的时间里两部件无故障地工作，$\chi(B)$表示事件B的状态变量，此时

$$h\geq M\zeta_1\geq M\zeta_1\chi(B)=hP(B)=he^{-(\lambda+\lambda_1)h},$$

亦即，$M\zeta_1\sim h$，所以

$$\frac{M\zeta_1^2q}{(M\zeta_1)^2}\leq\frac{h^2q}{(M\zeta_1)^2}\sim q\to0.$$

因此，由定理2.6的条件可以得到

$$P\{\tau>t\}\sim\exp[-(1-p)\lambda\lambda_1ht/2].$$

例3　临时性贮备系统　假设系统的故障率为λ，修复时间η服从任意分布$G(x)$。若系统发生故障就在规定的时间ζ内进行修复，ζ服从分布$\Phi(x)$，当在ζ内完成修复时，则不算系统发生故障；否则，就算系统发生故障。这种系统叫做临时贮备系统。显然，过程

$$x(t)=\begin{cases}0, & \text{在时刻}t\text{，系统没有进行修理；}\\ 1, & \text{在时刻}t\text{，系统正在修理。}\end{cases}$$

是特殊的再生过程。因为$x(t)=0$期间服从参数为λ的指数分布，且与其它参数无关。

工程中有许多临时贮备系统的例子。例如，电站出现故障时，就可以用蓄电池接替工作，蓄电池的电能可保证在时间ζ内的需要。在排除故障之后，蓄电池迅速充电备用。又如，系统的功能是接收并瞬时处理单个信息的泊松流（强度为ν的指数分布$\Phi(x)=1-e^{-\nu x}$；系统本身的故障率为λ。只有系统有故障正在修理而信息流到达时，才算系统发生故障。

现在，再回到一般模型，并找出系统无故障工作时间的分布。用定理2.8中的记法 $\tau_n=\min(\eta_n,\zeta_n)$

$$T=M\tau_n=\int_0^\infty \bar{G}(x)\bar{\Phi}(x)\mathrm{d}x,\quad q=\int_0^\infty \Phi(x)\mathrm{d}G(x),$$

且由该定理可知

$$e^{-\lambda q t}<P\{\tau>t\}<e^{-\lambda q t}+\lambda T.$$

例4　可修工作贮备系统　假设系统由故障率为λ_1和λ_2的两部件组成，每一部件发生故障就立即开始修理，修理时间的分布函数分别为$G_1(x)$、$G_2(x)$。只有两个部件都有故障时系统才发生故障。两部件状态（正常或故障）变化过程$x(t)$是特殊的再生过程。所谓再生时刻是指两部件完成了修复变为正常状态的时刻。两个部件都正常的时间服从参数为$\lambda=\lambda_1+\lambda_2$的指数分布。在定理2.8的符号中，变量$\zeta_n$的分布很复杂，但变量$\eta_n$具有下述简单的分布。

$$P\{\eta_n>t\}=[\lambda_1\bar{G}_1(t)e^{-\lambda_2 t}+\lambda_2\bar{G}_2(t)e^{-\lambda_1 t}]/\lambda.$$

概率q为

$$q=\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda}\left[\int_0^\infty \bar{G}_1(t)e^{-\lambda_2 t}\mathrm{d}t+\int_0^\infty \bar{G}_2(t)e^{-\lambda_1 t}\mathrm{d}t\right].$$

由此式可很容易地得到q的双侧估计，首先

$$q<\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda}(T_1+T_2)，\text{其中}T_i=\int_0^\infty t\mathrm{d}G_i(t),\quad i=1,2$$

其次，若假定存在二阶矩

$$m_i=\int_0^\infty x^2\mathrm{d}G_i(x)=2\int_0^\infty x\bar{G}_i(x)\mathrm{d}x,\quad i=1,2,$$

于是，存在

$$q\geq\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda}\left[T_1+T_2-\frac{\lambda_2 m_1}{2}-\frac{\lambda_1 m_2}{2}\right].$$

为估计首次故障前的时间分布，可利用定理2.9。在此定理的符号中，只要$\lambda(T_1+T_2)<1$，则变量Δ为

$$\Delta=\int_0^\infty e^{\lambda q t}P\{\eta_n>t\}\mathrm{d}t=\lambda_1\int_0^\infty e^{-(\lambda_2-\lambda q)t}\bar{G}_1(t)\mathrm{d}t+\lambda_2\int_0^\infty e^{-(\lambda_1-\lambda q)t}\bar{G}_2(t)\mathrm{d}t.$$

于是，当$\Delta<\lambda_1 T_1+\lambda_2 T_2$ [illegible]

$$\lambda_1 - \lambda q \geq \lambda_1[1 - \lambda_1(T_1+T_2)] > 0;$$

同理 $$\lambda_2 - \lambda q \geq \lambda_2[1-\lambda_2(T_1+T_2)] > 0.$$

利用定理2.9给出的估计，可得

$$\exp[-\lambda_1\lambda_2(T_1+T_2)t] \leq P\{\tau > t\}$$

$$\leq \begin{cases} (1+\lambda_1 T_1+\lambda_2 T_2)\exp\left[-\lambda_1\lambda_2\left(T_1+T_2-\frac{\lambda_2 m_1}{2}-\frac{\lambda_1 m_2}{2}\right)t\right], & t<\frac{1}{\lambda_1\lambda_2(T_1+T_2)}, \\ \exp\left[-\lambda_1\lambda_2\left(T_1+T_2-\frac{\lambda_2 m_1}{2}-\frac{\lambda_1 m_2}{2}\right)(1-\lambda_1T_1-\lambda_2T_2)t\right], & t>\frac{1}{\lambda_1\lambda_2(T_1+T_2)}. \end{cases}$$

上面我们得到的是两部件可修系统可靠性的双侧估计，它是用维修时间一、二阶矩表示的。

第三章　系统的可靠性

§3·1　由独立部件组成的不可修系统的可靠性

概述　假设系统是由n个部件组成的。第i个部件的寿命是服从分布函数为$F_i(t)=P\{\xi_i<t\}$的随机变量，其可靠度函数为$\bar{F}_i(t)=1-F_i(t)$。在本章中，我们假设部件是不可修的，各部件的寿命ξ_i是相互独立的。系统的第i个部件的状态用$e_i(t)$表示。

$$e_i(t)=\begin{cases}0, & \text{在时刻}t\text{第}i\text{个部件处于正常状态}\\ 1, & \text{在时刻}t\text{第}i\text{个部件处于故障状态.}\end{cases}$$

于是，可用二值向量表示系统的各部件状态，

$$\mathbf{e}(t)=[e_1(t),e_2(t),\cdots,e_n(t)].$$

假设系统也只有两个状态——正常和故障状态。令

$$\varphi_0(t)=\begin{cases}0, & \text{在时刻}t\text{系统处于正常状态;}\\ 1, & \text{在时刻}t\text{系统处于故障状态.}\end{cases}$$

同时，我们认为在任意时刻t，系统的状态唯一地决定于部件的状态。即

$$\varphi_0(t)=\varphi[e_1(t),\cdots,e_n(t)]=\varphi[\mathbf{e}(t)].$$

在可靠性理论中，函数φ要满足一个重要条件。为给出此条件，在二值向量集中引入偏序。可以说，如果对所有的i都有$e_i\le e_i'$，则

$$\mathbf{e}=(e_1,e_2,\cdots,e_n)\le\mathbf{e}'=(e_1',e_2',\cdots,e_n').$$

在这里和以后我们始终假设：函数$\varphi(\mathbf{e})$按以上引用的有序性是单调不减的，即对于所有$\mathbf{e}$和$\mathbf{e}'$，由$\mathbf{e}\le\mathbf{e}'$得出

$$\varphi(\mathbf{e})\le\varphi(\mathbf{e}'). \tag{3.1}$$

此约束的条件很简单：如果系统有故障，那么部件再有故障不可能使系统转移为正常状态。函数$\varphi(\mathbf{e})$决定于由n维二值向量集$E=\{\mathbf{e}\}$所划分的两个子集：系统的正常状态集$E_+=\{\mathbf{e}:\varphi(\mathbf{e})=0\}$和系统的故障状态集$E_-=\{\mathbf{e}:\varphi(\mathbf{e})=1\}$。如果满足了(3.1)式的条件，则将$E$划分为两个子集$E_+$和$E_-$叫做单调结构[10]。设$\tau=\inf[t:\mathbf{e}(t)\in E_-]$——系统无故障工作时间；$F(t)=P\{\tau<t\}$——在时刻$t$之前系统的故障概率分布函数；$\bar{F}(t)=P\{\tau\ge t\}$——在时刻$t$之前系统无故障工作概率。

从理论上说可很容易地写出系统无故障工作概率的表达式

$$\bar{F}(t)=\sum_{\mathbf{e}\in E_+}p(\mathbf{e}), \tag{3.2}$$

式中$p(\mathbf{e})=\prod_{i=1}^{n}\bar{F}_i^{1-e_i}(t)F_i^{e_i}(t)$（这里$0^0=1$）是系统在时刻$t$处于状态$\mathbf{e}$的概率。如果函数$\varphi(\mathbf{e})$满足条件(3.1)，则系统的可靠度函数$\bar{F}$将随系统的部件可靠度$\bar{F}_i$的增加而单调增加。所以，将部件的可靠度上限或下限代入(3.2)式，便可求出系统可靠度的上限估计

* 下标e应为黑体的，下同。

或下限估计一中获得的公式可于计算某些简单系统的可靠度。但是，如果函数 $\varphi(e)$ 相当复杂，且系统中的部件个数很多，则此公式的实用性就大大下降，因为等式右端的相加项数将非常大（须知，所有状态数等于 2^n）。所以，可用上述方法计算或估计某些系统的可靠度。在描述这些系统时，需要讨论系统中各部件的连接方法，它很象电路。用这种说法比较方便，但必须注意的是，当我们谈到系统中各部件的连接关系时，它只表示各部件功能的逻辑关系为 $\varphi(e)$。

串联系统和并联系统 如果系统中的任意部件发生故障就能导致系统发生故障，则此系统叫做串联系统。就可靠性框图来说，部件有串联连接，并不等于它在系统的结构图上也是串联的。例如，在并联电路中各部件是并联的，但若一部件发生故障就能导致系统发生故障（如，一部件短路，系统就短路），因此就可靠性框图来说，系统还是串联的。下面来研究串联系统可靠性的主要特征。由于部件发生故障是独立的，因此无故障工作概率为

$$\bar{F}(t)=\prod_{i=1}^{n}\bar{F}_i(t). \tag{3.3}$$

由著名的不等式

$$1-\sum_{i=1}^{n}F_i\leqslant\prod_{i=1}^{n}(1-F_i)\leqslant1-\sum_{i=1}^{n}F_i+\sum_{i<j}F_iF_j$$

$$\leqslant1-\sum_{i=1}^{n}F_i+\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}F_i\right)^2,$$

可得出近似公式

$$F(t)\approx\sum_{i=1}^{n}F_i \tag{3.4}$$

是正确的，其绝对误差不超过 $\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}F_i\right)^2$。

其次，系统的故障率为

$$\lambda(t)=-\frac{\bar{F}'(t)}{\bar{F}(t)}=-[\ln\bar{F}(t)]'=-\sum_{i=1}^{n}[\ln\bar{F}_i(t)]'$$

$$=-\sum_{i=1}^{n}\frac{\bar{F}_i'(t)}{\bar{F}_i(t)}=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(t). \tag{3.5}$$

显然，串联系统的故障率等于各部件的故障率之和。由此可见，如果每一部件的寿命都服从指数分布，则系统的寿命也服从指数分布。

令 $t_i=M\xi_i=\int_0^\infty\bar{F}_i(t)dt$ 为第 i 个部件的平均寿命，而 $T=M\tau=\int_0^\infty\bar{F}(t)dt$ 为系统的平均寿命。一般，系统的平均寿命 T 不能用部件的平均寿命 t_i 计算。但是，如果所有部件的寿命都服从指数分布，则由(3.5)式可得出

$$T=\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{t_i}\right)^{-1}. \tag{3.6}$$

对于由老化部件组成的系统，不难求出它的平均寿命下限估计式。设所有 $\xi_i\in S_3$，同第二章中表示的一样，此

$$\lambda_k(t) \geq \frac{1}{t_k}\int_t^\infty \bar F_k(x)dx / \bar F_k(t)^{*}$$

于是
$$1 = -\int_0^\infty \left[\prod_{i=1}^n \bar F_i(t)\right]' dt \geq \sum_{k=1}^n \frac{1}{t_k}\int_0^\infty \bar F_k(t)\prod_{i\neq k}\bar F_i(t)dt$$

$$\geq \sum_{k=1}^n \frac{1}{t_k}\int_0^\infty \prod_{i=1}^n \bar F_i(t)dt = T\sum_{k=1}^n \frac{1}{t_k}.$$

因此
$$T \leq \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{t_k}\right)^{-1}. \qquad (3.7)$$

换言之，依（3.6）式估计由老化部件组成的系统的平均寿命时，会降低平均寿命的真值，且n越大，降低得越多。例如，令部件i的$\bar F_i(t)=e^{-\lambda t^2}$，$t_i=\sqrt{\pi}/(2\sqrt{\lambda})=t_0$。于是，$\bar F(t)=e^{-n\lambda t^2}$，而$T=\sqrt{\pi}/(2\sqrt{\lambda n})=t_0/\sqrt{n}$。如果用（3.6）式估计平均寿命，则得到$T'=t_0/n$，就会使其降低$\sqrt{n}$倍。另一方面，如果$\bar F_i(t)=\exp\left(-\int_0^t\lambda(x)dx\right)$，$\lambda(0)>0$和$\lambda(x)$在零点连续，不难证明，当$n\to\infty$时，则

$$T=\int_0^\infty \exp\left[-n\int_0^t \lambda(x)dx\right]dt \sim \int_0^\infty \exp[-n\lambda(0)t]dt = \frac{1}{n\lambda(0)}.$$

由此可见，如果$\lambda(0)t_0$（t_0为部件的平均寿命）接近1（这说明部件是慢慢老化的），则（3.6）式将给出真值的近似结果。当估计系统的平均寿命时，应经常注意这两个典型的特例。

下面再来研究并联系统。它是另一种极为广泛的模型。若只有系统中的部件都发生故障时，系统才发生故障，则此系统叫做**并联系统**。并联系统的故障概率为

$$F(t)=\prod_{i=1}^n F_i(t). \qquad (3.8)$$

通常，当n个部件完成同一功能时，部件都是并联的。因此，实际上只要有一个部件就够了，而其余部件起贮备作用。于是，往往把并联系统叫做加载（或工作）贮备系统。显然，并联系统的部件常常是相同的。亦即

$$F_i(t)=F_0(t) \text{ 和 } F(t)=F_0^n(t). \qquad (3.9)$$

可以证明，如果$F_0\in S_0$，则$F\in S_0$。并联系统的平均寿命

$$T=\int_0^\infty [1-F_0^n(t)]dt, \qquad (3.10)$$

一般，计算比较麻烦。例如，当$\bar F_0(t)=e^{-\lambda t}$时，则

$$T=\frac{1}{\lambda}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right). \qquad (3.11)$$

*原文将$\int_t^\infty$误为$\int_0^\infty$.

当n很大时，由(3.11)式知，平均寿命T主要决定于t值很大时函数$F_0(t)$的"尾部"性状。但是，寿命分布"尾部"的性状，一般并不清楚。在这种情况下，最好求平均寿命的双侧估计值。尽管此估计是近似的，但却是简单而重要的。

定理3.1 如果$F_0\in S_0$，则

$$\bar{F}_0(T)\geq\exp\left[-\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\right]\geq\frac{0.564}{n+1}.$$

如果可靠度函数$F_0(t)$曲线在过点$t=T_1$（由方程$F_0(T_1)=1/(n+1)$解出T_1）的切线在该曲线之上，则$\overline{F}_0(T)\leq 1/(n+1)$。于是，如果满足这两个条件，则$T_1\leq T\leq T_2$。

式中 $$F_0(T_1)=1/(n+1),\quad F_0(T_2)=0.564/(n+1). \tag{3.12}$$

证明 如果$F_0\in S_0$，则$F_0(t)=e^{-A(t)}$，式中$A(t)$是下凸函数。在积分

$$T=\int_0^\infty\{1-[1-e^{-A(t)}]^n\}dt$$

中，将$A(t)=x$ $(t=\varphi(x))$代入，并分部积分，便得到

$$T=n\int_0^\infty(1-e^{-x})^{n-1}e^{-x}\varphi(x)dx.$$

因为$\varphi(x)$是上凸函数，所以其曲线在过a点的切线之下：$\varphi(x)\leq\varphi(a)+\varphi'(a)(x-a)$。由此可知

$$T\leq n\int_0^\infty(1-e^{-x})^{n-1}e^{-x}[\varphi(a)+\varphi'(a)(x-a)]dx$$

$$=\varphi(a)-a\varphi'(a)+\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\varphi'(a).$$

令$a=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$，使得

$$T\leq\varphi\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right),$$

亦即 $$A(T)\leq 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}.$$

和 $$F_0(T)\geq\exp\left[-\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\right].$$

因为，序列$a_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln(n+1)$是单调递增的，且收敛于欧拉常数$C=0.577\cdots$ [15]，所以

$$\exp\left[-\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\right]\geq\frac{e^{-C}}{n+1}\geq\frac{0.564}{n+1}.$$

于是，第一个不等式证毕。

假设定理的第二个条件成立。令积分$T=\int_0^\infty[1-F^n(t)]dt$中的$x=F_0(t)$，$t=\Psi(x)$，

于是 $$T=\int_0^1(1-x^n)d\Psi(x)=n\int_0^1 x^{n-1}\Psi(x)dx.$$

根据条件，函数$\Psi(x)$的曲线位于过点$x_0=n/(n+1)$的切线之上，所以

$$T\geq n\int_0^1 x^{n-1}[\Psi(x_0)+\Psi'(x_0)(x-x_0)]dx$$

$$=\Psi(x_0)-x_0\Psi'(x_0)+\frac{n}{n+1}\Psi'(x_0)=\Psi(x_0)$$

亦即，$F_0(T)\geq n/(n+1)$，$\bar F_0(T)\leq 1/(n+1)$。于是，定理证毕。

说明 定理的第二个条件可用其它条件代替。例如，如果分布函数$F_0(t)$的密度函数是单峰值的，则$y=\bar F_0(t)$有一个拐点，拐点对应的时间为t_1。当$T_1<t_1$时，y的曲线是下凸的；当$T_1>t_1$时，y的曲线是上凸的。由直线$t=0$、$y=0$、$y=1$与$\bar F_0(t)$在点t_1的切线所形成的梯形面积小于平均寿命（亦即小于$\bar F(t)$下的面积），则从第二部分的证明可知，T的下限估计确实是正确的。

举例 设由$n=4$个部件组成的并联系统，部件的$\bar F_0(t)=\exp[-(\lambda t)^2]$，$\lambda=0.001$/小时，求系统的平均寿命。$F_0(t)$是威布尔分布，部件寿命属于老化类$S_0$。由不等式（3.12）给出

$$\lambda^{-1}\sqrt{\ln 5}\leq T\leq\lambda^{-1}\sqrt{\ln(5/0.364)}\ \text{或}1270\text{小时}\leq T\leq 1160\text{小时}.$$

用直接计算的结果可很容易地检验过点$T=1270$作$\bar F_0(t)$的切线交于坐标轴的点小于1。由于威布尔分布密度是单峰值的，所以同样可以满足定理的第二个条件。

此外，还有**n中取m系统**，记作m/n。即由n个部件组成的系统，当其中有m个正常时系统就正常。这种系统的可靠度为

$$\bar F(t)=\sum_{k=m}^{n}C_n^k\bar F^k(t)F^{n-k}(t),\quad C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}. \tag{3.13}$$

由此式也可得到其估计为（3.12）式

路集法和割集法 这里介绍计算和估计可靠度的一般方法：路集法和割集法[10]。

所谓路集是指系统中当某些部件处于正常状态就能使系统处于正常状态（与其它部件的状态无关）时，则这些部件的集合叫做**路集**，记作$A=\{i_1,i_2,\cdots,i_k\}$。

又若路集中的任何子集都不能使系统处于正常状态时，则此路集叫做**最小路集**。

很容易看出，由于（3.1）式具有单调性，当且仅当系统的状态向量$e=\{1,\cdots,1,0,1,\cdots\}\in E_+$，编号为$(i_1,\cdots,i_k)$的部件所对应的分量都为0而其余分量都为1时，集合$\{i_1,i_2,\cdots,i_k\}$才是路集。如果比向量e大的任何向量都属于$E_-$，则该集便是最小路集。因此，每一最小路集都对应一临界向量e。对应于临界向量的任何部件再发生故障都会导致系统故障。

令$A_1,A_2,\cdots,A_m$为所有的路集；而$e^{(1)},e^{(2)},\cdots,e^{(m)}$为与路集对应的临界状态向量，即路向量。令第$s$个路集$A_s$中的所有部件都正常所组成的事件，也记作$A_s$。因而可得出$A_s=\{e:e\leq e^{(s)}\}$。由路集$A$的定义知，$\bigcup_{s=1}^{m}A_s\subset E_+$。下面再来证明逆包含关系。设$e\in E_+$。在状态向量e中用1代替0，并使得到的状态仍然属于E_+。经有限几步代替之后，可得到与路集A_s相应的状态$e^{(s)}\in E_+$，这相当于路集仍然是通的。可见，$e\in A_s\subset\bigcup_{s=1}^{m}A_s$，于是$E_+=\bigcup_{s=1}^{m}A_s$。因此

$$F(t)=P\left\{\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right\}=\sum_{i=1}^{n} P\{A_i\}-\sum_{i<j} P\{A_iA_j\}+\sum_{i<j<k} P\{A_iA_jA_k\}-\cdots. \quad (3.14)$$

上式右端的每一概率可很容易地计算出来。当路集数不多时，用（3.14）式是很方便的；但是，当路集数很多时，此式就无能为力了，因为其右端的相加项之和为2^n-1。只有在某些特殊情况下，才有比较简单的方法。首先，很明显

$$F(t)=1-\bar{F}(t)=P\{\bar{A}_1\bar{A}_2\cdots\bar{A}_n\},$$

式中$\bar{A}_k$——A_k的对立事件。若系统的两个路集包括共同的部件，则称它们为相交路集。如果有两个路集是相交路集，则称它们是连通的。因为路集有连通与否之分，因此可将路集按连通性分为若干组。每组路集是连通的，各组间是独立的。于是，把路集分为$A_1,\cdots,A_{k_1}$——第一组，$A_{k_1+1},\cdots,A_{k_2}$——第二组等等。由于各组间是相互独立的，所以

$$F(t)=P\{\bar{A}_1\cdots\bar{A}_{k_1}\}P\{\bar{A}_{k_1+1}\cdots\bar{A}_{k_2}\}\cdots.$$

如果各组的路数不大，则（3.14）式右端的概率可很容易地计算

再来介绍割集的概念。若系统中某些部件处于故障状态（与系统中其它部件的状态无关）就能使系统处于故障状态，则这些部件的集合叫做割集，记作$B_j=\{i_1,i_2,\cdots,i_s\}$，式中$B_j$——第$j$个割集；$i_r$（其中：$r=1,2,\cdots,s$）是第$j$个割集中的第$r$个部件。令$B_j$中的所有部件都处于故障状态所组成的事件，也用$B_j$表示。因为割集与路集的概念是对偶的，因此可按字面重复上述论述，只改变相应的术语："路集"→"割集"，"0"→"1"，"正常"→"故障"，"大于"→"小于"。于是，便得到类似于（3.14）的公式

$$F(t)=P\left\{\bigcup_{j=1}^{m} B_j\right\}=\sum_{j=1}^{m}P\{B_j\}-\sum_{i<j}P\{B_iB_j\}+\sum_{i<j<k}P\{B_iB_jB_k\}-\cdots$$
$$=S_1-S_2+S_3-\cdots. \quad (3.15)$$

在估计可靠度时，用（3.15）较（3.14）方便得多。这是因为在工程上的系统可靠性都较高，在规定的使用时间里其故障概率相当小，在这种情况下$S_1,S_2,\cdots$之和也很小；而且，对于不相交的割集满足$S_2\leqslant\frac{1}{2}S_1^2$，$S_3\leqslant\frac{1}{6}S_1^3$，…等；而在相交割集中，和$S_i$的阶一般不变，亦即$S_i=o(S_1)$。其次，经分析可知[15]，对任意$k$有$S_1-S_2+\cdots-S_{2k}\leqslant F(t)\leqslant S_1-S_2+\cdots+S_{2k+1}$。这就是说，（3.15）式右端之和交替地给出$F(t)$的上下限，而且各相加项迅速递减。因此，可根据预先给定的任意精度估计系统的故障概率。特别是

$$\sum_{j=1}^{m}P\{B_j\}-\sum_{i<j}P\{B_iB_j\}\leqslant F(t)\leqslant\sum_{j=1}^{m}P\{B_j\}.$$

通常，用此不等式给出的可靠度上下限估计是相当精确的。

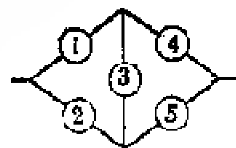


图 3.1

举个例子 研究一个工程中应用很广的桥式网络，其示意图如图3.1所示。假设各部件的可靠性相同，$F_i(t)=q=0.1$，现在来估计系统的故障概率。显然，这里有四个割集：$B_1=\{1,2\}$，$B_2=\{4,5\}$，$B_3=\{1,3,5\}$，$B_4=\{2,3,4\}$。先求（3.15）式的前两项为

$$S_1=\sum P\{B_j\}=2q^2+2q^3=0.022,$$

$$S_2 = \sum_{i<j} P\{\cdots\} = [illegible]q^4 + q^6 = 0.00051.$$

因此
$$0.02149 \leqslant P(t) \leqslant 0.022.$$

最后，必须指出也可以用（3.13）式求可靠度的下限[6]。因为$P\left\{\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right\} \geqslant P\left\{\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right\}$，$k<m$。如果不能满足需要的指标，就要再设置更可靠的路，并增加路数，直到可靠度下限满足要求的指标为止。

递推法[40] 在计算可靠度时，往往需要用递推法。此方法的实质是：用S_i表示系统可靠度上下限序列$S_1, S_2, \cdots, S_n, \cdots$的第$n$个，并$\Omega = \{\omega_n\}$表示系统的概率空间。选择该空间要满足两个条件：可以根据ω_n唯一地确定系统的状态是否正常；系统状态的序列形成一个马尔科夫链，即按照已知的系统的状态ω_n能唯一地确定第$n+1$个状态的概率，而这些概率与第$k(k<n)$个状态ω_k无关。

如果满足上述两个条件，则系统的可靠度可用通常的马尔科夫法计算[148]。在采用递推法时，主要问题是选择概率空间Ω。例如，令$\omega_n = e = (e_1, e_2, \cdots, e_n)$，即给出系统所有部件的状态，则所选择的空间的条件当然能满足。但是，若状态数很多时，计算量将很大致使计算不能进行到底。反之，若用太粗的方法选择空间，则两个条件都不能满足。下面举两个例子说明之。

例1　通讯网络贮备系统可靠度的计算　假设系统如图3.2所示，信息由点A传到两个节点，再由每个节点沿两条线传到以后的两个节点、…、最后由第n个节点传到点Б。设从节点A到Б的各线都是无故障的，只有节点可能发生故障，且各故障是相互独立的，各节点发生故障的概率均为q。此系统是由$4(n-1)$个节点组成的，如果信息能顺利地由A传到Б，则系统便是正常的。

选择$\Omega = \{0, 1, 2\}$作为空间，状态ω_n表示信息未进入最后的n个节点。显然，序列$\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n, \cdots$形成马尔科夫链，其状态转移概率为

$$p_{00} = (1-q^2)^2,\quad p_{01} = 2q^2(1-q^2),\quad p_{10} = (1-q)^2,\quad p_{11} = 2q(1-q).$$

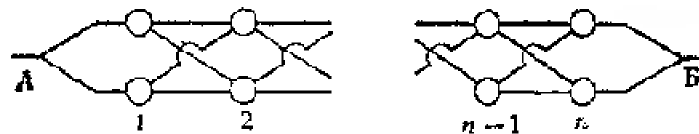


图 3.2

其它转移概率可以计算。因为状态2是吸收状态。令$p_n = P\{\omega_n = 0\}$，$q_n = P\{\omega_n = 1\}$。这样，$P = p_n + q_n$是系统无故障工作概率，概率p_n和q_n满足初始条件为$p_1 = 1$，$q_1 = 0$的递推方程（柯尔莫哥洛夫方程）

$$p_{n+1} = (1-q^2)^2 p_n + (1-q)^2 q_n,$$
$$q_{n+1} = 2q^2(1-q^2) p_n + 2q(1-q) q_n.$$

用一般方法解这个方程，便得

$$P_n = [illegible]$$

式中 $\lambda_1=q(1-q)+\frac{(1-q^2)^2}{2}+\sqrt{\frac{(1-q^2)^4}{4}+q^2(1-q)^2-q(1-q)^3(1-q^2)}$ ；

$$\lambda_2=q(1-q)+\frac{(1-q^2)^2}{2}-\sqrt{\frac{(1-q^2)^4}{4}+q^2(1-q)^2-q(1-q)^3(1-q^2)}$$ 。

是方程$\lambda^2-[2q(1-q)+(1-q^2)^2]\lambda+2q(1-q)^2(1-q^2)=0$的根。因此，当$q\to 0$时，$\lambda_1\to 1$，$\lambda_2\to 0$。所以，当$q$很小和甚至$n$不大时，无故障工作概率表达式中的第二项可放心地忽略不计。根λ_1和λ_2的展开式分别为$\lambda_1=1-3q^4+o(q^4)$，$\lambda_2=2q-4q^3+4q^4+o(q^4)$。于是，可得到近似公式

$$P\approx(1-q^4)(1-3q^4)^n. \qquad (3.16)$$

例2 分枝系统可靠度(图3.3) 可靠度函数为p_0的输入部件控制着可靠度函数为p_1的a_1个相同的第1级部件，其中每一部件又控制着可靠度函数为p_2的a_2个第2级部件，…。最后，控制着第n级部件，该级部件叫做输出部件，共有$N=a_1a_2\cdots a_n$个部件。当某一部件发生了故障，则其所控制的全部部件都不能工作。而输出部件不能工作的原因或者是前面的部件发生故障，或者是本身有故障。如果工作的部件数小于某一临界数m，则认为系统S_n发生故障。令以输出部件正常工作的部件数作为系统S_n的临界状态，并用$\omega_n(\omega_n=0,1,2,\cdots,N)$表示。序列$\omega_0,\omega_1,\cdots,\omega_n,\cdots$形成马尔科夫链。此链是瓦特松-卡尔顿(Ватсона-Гальтона)离散分枝过程的特殊情况[48]，而用母函数法研究它最简单。令$P_n(z)=\mathrm{M}z^{\omega_n}$。令$\nu_n$表示二值随机变量，则前一级一个部件所控制的第$n$级$a_n$个部件中有$k$个部件未发生故障的概率为

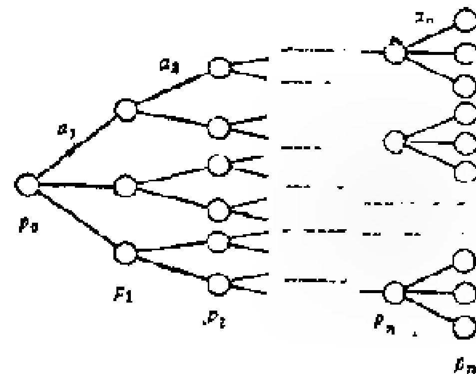


图3.3

$$P\{\nu_n=k\}=C_{a_n}^k p_n^k q_n^{a_n-k},\quad q_n=1-p_n.$$

随机变量的母函数为$\mathrm{M}z^{\nu_n}=(p_nz+q_n)^{a_n}$。不难看出$\omega_n=\nu_n^{(1)}+\nu_n^{(2)}+\cdots+\nu_n^{(\omega_{n-1})}$，式中$\nu_n^{(i)}$是独立的且服从二项分布的随机变量。于是，根据全概率公式

$$P_n(z)=\sum_s P\{\omega_{n-1}=s\}\mathrm{M}z^{\nu_n^{(1)}+\cdots+\nu_n^{(s)}}$$

$$=\sum_s P\{\omega_{n-1}=s\}(p_nz+q_n)^{a_ns}=P_{n-1}[(p_nz+q_n)^{a_n}].$$

于是

$$P_n(z)=P_{n-1}[(p_nz+q_n)^{a_n}]. \qquad (3.17)$$

而且，$P_0(z)=p_0z+q_0$。原则上可能用此递推公式求母函数$P_n(z)$，但当输出部件多时，效果不好。然而，求变量ω_n的一阶矩比较简单。

$$\mathrm{M}\omega_n=P_n'(1)=P_{n-1}'(1)a_np_n=p_0p_1\cdots p_na_1a_2\cdots a_n \qquad (3.18)$$

考虑到计算高阶矩的计算量很大，建议采用下述可靠度函数近似公式：

$$P=P\{\omega_n\geq m\}\approx P\{\omega_n/N\geq m/N\}.$$

根据[151]的证明知

$$\lim_{l\to\infty}\sum_{\frac{k}{l}>a}C_l^k x^k(1-x)^{l-k}=\begin{cases}0, & x<a;\\ 1, & x>a.\end{cases}$$

这样一来 $$\lim_{l\to\infty}M\left[\sum_{\frac{k}{l}\geq\frac{m}{N}}C_l^k\left(\frac{\omega_\pi}{N}\right)^k\left(1-\frac{\omega_\pi}{N}\right)^{l-k}\right]=P\left\{\frac{\omega_\pi}{N}\geq\frac{m}{N}\right\}=F.$$

故当l相当大时，下述近似公式成立（计算表明，当$l=3,4$时的近似值已相当满意）。

$$F\approx\sum_{\frac{k}{l}\geq\frac{m}{N}}C_l^k\frac{1}{N^l}M\omega_\pi^k(N-\omega_\pi)^{l-k}. \tag{3.19}$$

式中右端表示不超过ω_π的l阶矩。

对称性的利用 现在回过头来研究一般情况。设由n个二状态部件组成一系统。令部件的状态向量为$\mathbf{e}=(e_1,e_2,\cdots,e_n)$，系统的状态函数为$\varphi(\mathbf{e})$。设各部件的可靠性完全相同，而且当向量$\mathbf{e}$中的各部件位置任意配置都不会改变系统的状态函数$\varphi(\mathbf{e})$，则称此组部件为对称部件组，可将所有的部件划为对称部件组：$(1,2,\cdots,k_1),(k_1+1,\cdots,k_2),\cdots,(k_{l-1}+1,\cdots,k_l)$，各组的部件数分别为$m_1=k_1$，$m_2=k_2-k_1$，$\cdots$，$m_l=k_l-k_{l-1}$。

令$\pi_1,\pi_2,\cdots,\pi_l$分别为各对称部件组的可靠度函数。依(3.2)式知$F(t)=\sum_{\mathbf{e}}\varphi(\mathbf{e})p(\mathbf{e})$。

令$\nu_1,\nu_2,\cdots,\nu_l$分别为对称部件组中有故障的部件数。显然

$$p(\mathbf{e})=\prod_{i=1}^{l}\pi_i^{m_i-\nu_i}(1-\pi_i)^{\nu_i}.$$

因为在对称部件组中向量$\mathbf{e}$的分量任意置换时，$\varphi(\mathbf{e})$和$p(\mathbf{e})$不变，所以故障概率也可用类似的方法表示。在每个第i组中，有$C_{m_i}^{\nu_i}$种可能的方式来重新排列ν_i个1，可能置换的数为$\prod_{i=1}^{l}C_{m_i}^{\nu_i}$。因此，系统的故障概率为

$$F(t)=\sum_{\mathbf{v}}\varphi_0(\mathbf{v})\prod_{i=1}^{l}C_{m_i}^{\nu_i}\pi_i^{m_i-\nu_i}(1-\pi_i)^{\nu_i}. \tag{3.20}$$

式中$\varphi_0(\mathbf{v})=\varphi(\mathbf{e})$，而$\mathbf{v}=(\nu_1,\cdots,\nu_l)$。将对称概念归纳如下：令

$$T=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n\end{pmatrix}$$

表示变换，且$\mathbf{e}=(e_1,e_2,\cdots,e_n)$。现在来研究$\mathbf{e}'=T\mathbf{e}=(e_{i_1},e_{i_2},\cdots,e_{i_n})$的变换。可以这样说，如果对于任意$\mathbf{e}$，$p(T\mathbf{e})=p(\mathbf{e})$和$\varphi(T\mathbf{e})=\varphi(\mathbf{e})$，则系统对$T$的变换是不变的。显然，系统关于它们不变的那些置换的集合构成一个群$G=\{T\}$。如果求得$T\in G$，使$\mathbf{e}'=T\mathbf{e}$，则称状态$\mathbf{e}$和$\mathbf{e}'$为等价状态。于是，可将整个状态集分为等价状态类，等价状态类的序号为$1,2,\cdots,m$，并设N_k——第k类中的状态数。显然，如果状态向量$\mathbf{e}$属于第k类，则

$$F(t)=\sum_k\varphi_0(k)N_kp_0(k). \tag{3.21}$$

式中$\varphi_0(k)=\varphi(\mathbf{e})$，$p_0(k)=p(\mathbf{e})$。

§3·2 由相依部件组成的系统可靠度的某些模型

离散的相关性 以上所研究的系统都是假定部件的寿命是相互独立的。现在，我们放弃

这一假设，并来研究（主要是定性的）系统中部件的故障是相依的模型。这种分类法只是大致的。

首先研究如下模型：一部件离散状态的变化会引起其它部件离散状态的变化。这种模型叫做离散的相依性模型（也许不够严格）。假设每一部件都有三种状态：空闲、工作和失效。失效状态是不可修复的故障状态。各部件的状态用三值状态向量 $\mathbf{v}=(v_1, v_2, \cdots, v_n)$ 表示。当部件 i 空闲时，令 $v_i=0$；当部件 i 工作时，令 $v_i=1$；当部件 i 失效时，令 $v_i=2$。

假定将部件的失效分为固有失效和非固有失效，所谓固有失效是指部件本身寿命 ξ_i 终结而失效，寿命 ξ_i 与其它部件的性状无关，即部件 i 的总工作时间（即在状态 1 逗留的时间）到达自己的寿命 ξ_i 时就发生固有失效，所谓非固有失效（即状态由 $0\to 2$ 或 $1\to 2$）是指部件的失效时刻决定于其它部件的失效。又假设部件的固有失效决定于该部件的某一转移概率，这种失效使部件的状态由 $0\to 2$ 或由 $1\to 2$。

通常，研究下述模型比较有意义。这里以不可修冷贮备系统为例。设系统由 n 个相同部件组成。每一部件无故障工作时间的分布函数都是 $F(x)$，在时刻 $t=0$ 时，部件 1 接通工作，而其余部件处于空闲状态。当部件 1 工作了时间 ξ_1 时失效，部件 2 立即接通（即，部件 1 的固有失效会使下一部件的状态由 $0\to 1$，假设转换开关不完全可靠，部件 1 依一定概率失效会使部件 2 的状态由 $0\to 2$）。部件 2 工作了时间 ξ_2 时失效，于是部件 3 立即接替工作等等。由 n 个部件组成的系统，只有所有 n 个部件都失效时系统才发生故障。显然，这种系统的寿命 $\tau=\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_n$。系统的故障概率 $F_n(t)$ 可用递推公式（见 §1-3）求出

$$F_n(t)=\int_0^t F_{n-1}(t-x)\,\mathrm{d}F_1(x); \tag{3.22}$$

而系统的平均寿命

$$T_n=M\tau=nT_1, \quad T_1=M\xi_1. \tag{3.23}$$

由于（3.22）式的具体形式一般不知道，所以只能作为对系统故障概率双侧估计的一种方法。下述论点是正确的：如果对任意 $x\leqslant t$，有 $A_1(x)\leqslant F_1(x)\leqslant B_1(x)$，其中 $A_1(0)=B_1(0)=0$，并且函数 $A_1(x)$ 和 $B_1(x)$ 都是单调不减函数，则对于任意 $x\leqslant t$ 和 n，存在

$$A_n(x)\leqslant F_n(x)\leqslant B_n(x). \tag{3.24}$$

其中 $A_n(x)$ 和 $B_n(x)$ 是用 $A_1(x)$ 或 $B_1(x)$ 代替（3.22）式中的 $F_1(x)$ 用递推公式（3.22）求出的。特别地，如果在 $x\leqslant t$ 时，$ax\leqslant F_1(x)\leqslant bx$，则对所有的 $x\leqslant t$ 和 n，存在

$$\frac{(ax)^n}{n!}\leqslant F_n(x)\leqslant\frac{(bx)^n}{n!}. \tag{3.25}$$

如果 $F_1\in S$，则可证明[44]对所有 $x\geqslant 0$，

$$F_n(x)\geqslant\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k!}\left[\ln\frac{1}{\bar F_1(x)}\right]^k\bar F_1(x). \tag{3.26}$$

这个估计与（3.22）式不同，使用方便。它不需知道函数 $F_1(u)$（$u\leqslant x$）的中间值，而只要知道 $F_1(x)$ 就够了。

初始参数的相依性 系统无故障工作时间决定于部件参数的初始值和系统的工作方式。这里的失效可以是相依的。发生相依失效的原因除了它们处于同一系统有共同的随机失效因素外，还有部件参数的初始值是相依的。过去对这个原因几乎没有认识，据我所知首先注意

这个问题的是乌里尼奇。这里仅举一简单例子。例如，在一台机床上制造同样的零件，并在传送带终端装配成系统。此系统由按顺序生产的100个部件组成。机床周期性地发生不能立即发现的失常，从发生失常到发现失常的时间里平均能出现100个次品，系统因可能含这些部件开始工作就发生故障。假设机床在两次失常之间所生产的部件均无故障。在发现次品时把机床调整好再继续生产。最后，在机床发生两次失常的时间里，我们从大批零件（例如，一年的产量）中按均匀分布抽样试验。根据试验数据，得到零件的失效概率等于100/100000=0.001。若用零件装成串联系统，且零件的失效是独立的，则系统的故障概率 $F=1-(0.999)^{100}=0.095$。显然，在这种条件下，在生产中未发现失常的周期内所生产的零件必有次品，若用这种零件装成1000个系统，必有1～2个有故障。系统的故障概率为 $0.001\leqslant F\leqslant 0.002$。上述两个结果相差这么大，就是因为后者忽视了参数初始值的相依性。

上述例子是很简单的，而又有些言过其实，目的是引起读者注意：不可忽视参数初值的影响。在计算可靠性时，尤其是计算电子设备的可靠性时，应给予足够的注意。

以共同方式工作的部件之间的相依性 所谓状态 $\varepsilon(t)$ 是指决定 i 个部件工作时间的随机过程。为了简单起见，假设系统为串联系统，并且在给定工作方式的轨迹中各部件是相互独立的。于是，若 $\bar{F}(t|\varepsilon)$ 是给定状态 $\varepsilon(t)$ 的条件下系统无故障工作的概率，则系统的可靠度函数为

$$\bar{F}(t)=\mathrm{M}_{\varepsilon}\bar{F}(t|\varepsilon)=\mathrm{M}_{\varepsilon}\prod\bar{F}_i(t|\varepsilon)=\int_{\Omega}\prod\bar{F}_i(t|\varepsilon)P(\mathrm{d}\varepsilon). \tag{3.27}$$

式中 $P(\mathrm{d}\varepsilon)$ 是状态轨迹上的概率测度。第 i 个部件无条件可靠度函数为

$$\bar{F}_i(t)=\mathrm{M}_{\varepsilon}\bar{F}_i(t|\varepsilon)=\int_{\Omega}\bar{F}_i(t|\varepsilon)P(\mathrm{d}\varepsilon).$$

总而言之，由这两个公式可以看出，一般情况下

$$\bar{F}(t)\neq\prod_{i=1}^{n}\bar{F}_i(t).$$

为了利用公式（3.27），首先，应知道可靠性与状态的关系是怎样的；其次，要知道随机过程 $\varepsilon(t)$ 的分布是怎样的。然而，若不知道这种关系和分布时，而只要一个唯一条件加到可靠性与状态的关系上，便可获得有效的不等式。假定在任意两个允许状态 ε' 和 ε'' 和任意 i 和 j 时，则可靠度与状态的关系为

$$[\bar{F}_i(t|\varepsilon')-\bar{F}_i(t|\varepsilon'')][\bar{F}_j(t|\varepsilon')-\bar{F}_j(t|\varepsilon'')]\geqslant 0.$$

此条件表明，在状态改变时，所有部件的可靠度或减小，或增加。这样，由契比雪夫不等式（2.4）（严格地说，是(2.4)式推广到多维情况[151]）可得到

$$\bar{F}(t)=\int_{\Omega}\prod_{i=1}^{n}\bar{F}_i(t|\varepsilon)P(\mathrm{d}\varepsilon)\geqslant\prod_{i=1}^{n}\int_{\Omega}\bar{F}_i(t|\varepsilon)P(\mathrm{d}\varepsilon)=\prod_{i=1}^{n}\bar{F}_i(t). \tag{3.28}$$

此式表明，在假定故障独立的条件下，计算的可靠度会比实际的可靠度稍小。

当部件的状态受系统中其它部件状态影响时的可靠度 假设系统中一部件的状态决定于系统中各部件的二值状态向量 $\mathbf{e}(t)=[e_1(t),e_2(t),\cdots,e_n(t)]$。令 e_0^t 表示在区间 $[0,t]$ 上过程 $\mathbf{e}(x)$ 的轨迹。假定既没有初始参数的相互影响，也没有共同失效因素的影响，则一个部件与其它部件之间的可靠度模型便是唯一可能的相依模型。一些部件的故障可以引起其它部件参数渐变或突变。例如，部件发生故障的瞬间产生脉冲电流，会引起其它部件参数突然变化。再如，在串联电路中一部件短路，会使其它部件上电压升高，从而加速了这些部件的

耗损。又如，在并联电路中， 部件断路，会使其它部件的负载增加，因而可靠性下降。

上述物理模型 一言难尽。 一般，在数学上可归纳为：如果在时刻 t 前过程 $\mathbf{e}(x)$ 的轨迹 e_0^t 是给定的，则在时间 Δt 内向状态 $\mathbf{e}$ 转移的概率为

$$\lambda(e_0^t, \mathbf{e})\Delta t + o(\Delta t).$$

这一公式，也考虑到在同一瞬间出现几个故障是小概率事件。

在特殊情况下，在同一时刻只发生一个故障。这时，过程 $\mathbf{e}(t)$ 可用部件 i 的故障率 $\lambda_i(e_0^t)$ 表示——在 $[0,t]$ 中过程轨迹给定的条件下，部件 i 的故障率。还有更特殊的情形，即部件 i 的故障率只决定于时刻 t 和在该时刻系统的状态：$\lambda_i(e_0^t)=\lambda_i[t,\mathbf{e}(t)]$。在这种情形下的过程 $\mathbf{e}(t)$ 是有限状态非齐次马尔科夫过程。最后，要研究的问题是：部件故障率与时间无关，而只与系统的其它部件的状态有关：$\lambda_i(t,\mathbf{e})=\lambda_i(\mathbf{e})$。这种马尔科夫过程有时叫做广义纯灭过程（将在后面介绍）。对于最后一种情况来说，如果部件对称地组成系统（见 § 3.1），那么各部件的故障率为 $\lambda_i(\mathbf{e})=\lambda(\mathbf{e})$ 此外，故障率与向量 $\mathbf{e}$ 无关，而只与已故障部件数 $|\mathbf{e}|$ 有关，则 $\lambda(\mathbf{e})=\lambda(|\mathbf{e}|)$，其中 $|\mathbf{e}|=\sum_{i=1}^{n}e_i$。所谓**纯灭过程**是指由状态 $|\mathbf{e}|=i$ 只能依故障概率为 $\nu_i=(n-i)\lambda(i)$ 向相邻的状态 $i+1$ 瞬时转移的过程 $\xi(t)=|\mathbf{e}(t)|$。关于纯灭过程的详细论述可参考《可靠性理论中的数学方法》[44]。

§ 3·3 马尔科夫法

系统性状的一般模型 系统状态随时间变化可用某一过程来描述。一般，此过程是多维过程。因为影响系统状态的因素几乎都是随机的，所以过程是随机过程。我们研究系统的可靠性，就要选择这样的过程——根据每一时刻的状态可以肯定地说系统处于正常状态或故障状态；另一方面，对可靠性影响不大的分量可忽略不计。令 $\kappa(t)$ 表示此过程，E 表示过程的状态集。如上所述，可将 E 划分为两个不相交的子集：$E=E_+ + E_-$。如果过程 $\kappa(t)\in E_+$，则在时刻 t 系统处于正常状态；如果过程 $\kappa(t)\in E_-$，则在时刻 t 系统处于故障状态。系统的状态由 $E_+\to E_-$ 叫做系统发生故障，而由 $E_-\to E_+$ 叫做系统更新。随着时间的增大过程可以屡次由 E_+ 转移到 E_-，和由 E_- 转移到 E_+，过程随时间的转移图象如图3.4所示。令 $\tau_0', \tau_1', \cdots, \tau_i'$ ——系统处于正常状态的时间序列；$\tau_1'', \tau_2'', \cdots, \tau_i''$ ——系统处于故障状态的时间序列。通常对系统的更新过程的性状用平稳分布和极限 $\tau_i'\to\tau'$，$\tau_i''\to\tau''$ 表示。称变量 τ_0' 为系统首次故障前工

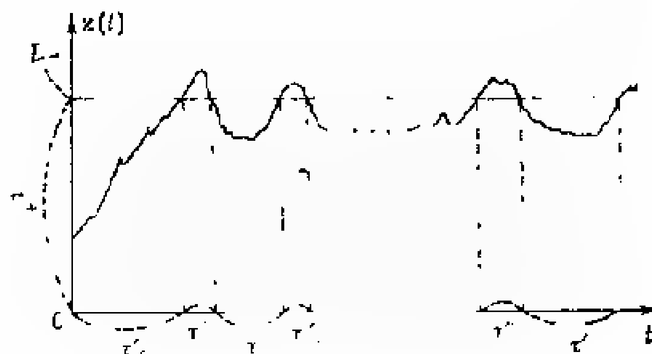


图 3.4

作时间。称变量τ'为工作到发生一次故障的时间。

现在来研究从时刻t系统处于正常状态E_+到第一次转移为故障状态E_-的时刻前的时间τ_t。若在时刻t系统转移为故障状态，则$\tau_t=0$。对遍历过程来说，存在极限$\tau_t \xrightarrow{p} \tau$。$\tau_0'$，$\tau_t$，$\tau_t''$，$\tau$，$\tau'$，$\tau''$，$\tau$，的平均值$T_t'=M\tau_t'$，$T_t'=M\tau_t'$，$T_t''=M\tau_t''$，$T=M\tau$，$T'=M\tau'$，$T''=M\tau''$，$T=M\tau$以及可用度$K_r=T'/(T'+T'')$是主要的可靠性特征量。研究计算或估计这些特征量的方法是可靠性理论的重要课题之一。在工程中计算可靠性时，广泛应用最简单的随机过程模型（尽管有时理由不很充分）。这种模型是有限状态或可列（数）状态齐次马尔科夫过程。本节将专门阐述应用这种马尔科夫过程分析系统的可靠性。

马尔科夫过程的特征公式　假设过程$\kappa(t)$是有限状态为$0,1,2,\cdots,N$的齐次马尔科夫过程，令$E_+=\{0,1,2,\cdots,n\}$表示系统处于正常状态集；$E_-=\{n+1,\cdots,N\}$表示系统处于故障状态集。顺便提一下，如果对于任意时刻$0\leqslant t_1<t_2<\cdots<t_k<t<t+h$所对应的状态为$i_1,i_2,\cdots,i_k,i,j$（$j\neq i$），则条件概率为

$$P\{\kappa(t+h)=j \mid \kappa(t)=i,\ \kappa(t_k)=i_k,\cdots,\kappa(t_1)=i_1\}$$
$$=P\{\kappa(t+h)=j \mid \kappa(t)=i\}=\lambda_{ij}h+o(h). \qquad (3.29)$$

此过程叫做**齐次马尔科夫过程**。此定义说明，已知时刻t的状态，在时刻t以后的时间h过程的状态概率与时刻t以前过程的状态无关。在可靠性理论中，如果系统的故障概率和系统的更新时间只决定于系统中部件的状态（工作或不工作），而与系统已经工作了多少时间无关、与系统更新了多少次无关，则此过程叫做马尔科夫过程。如果每一部件的无故障工作时间和更新时间都服从指数分布，且与其它部件的状态无关，则此过程也是马尔科夫过程。

根据马尔科夫过程的定义，不难证明，此过程具有与原始定义等价的两个性质。

1．过程处于状态i的时间间隔ξ_i与过程在该时间间隔以前的性状无关，并且服从指数分布$P\{\xi_i\geqslant t\}=e^{-\lambda_i t}$，其中$\lambda_i=\sum\limits_{j\neq i}\lambda_{ij}$。

2．过程所经历的状态以概率$\pi_{ij}=\lambda_{ij}/\lambda_i$形成马尔科夫链（若$\lambda_i=0$，此状态$i$为吸收状态，即过程进入此状态后，永远停留在此状态。在这种情况下，可以认为$\pi_{ij}=0$）。对于许多问题来说，马尔科夫过程可理解为：假设$p_i(t)=P\{\kappa(t)=i\}$满足柯尔莫戈罗夫（Колмогоров）方程[118]。

$$p_j'(t)=\sum_{i=0}^{N}\lambda_{ij}p_i(t),\quad j=0,1,\cdots,N. \qquad (3.30)$$

此方程组可用矩阵表示

$$\mathbf{P}'(t)=\mathbf{P}(t)\Lambda.$$

式中$\mathbf{P}(t)=[p_0(t),\cdots,p_N(t)]$——状态概率向量，而$\Lambda=(\lambda_{ij})$——转移强度矩阵，此矩阵具有两个特性：1．当$i\neq j$时，所有的$\lambda_{ij}\geqslant 0$；2．$\sum\limits_{j=0}^{N}\lambda_{ij}=0$。为了使方程组（3.30）有唯一解，必须已知过程的初始概率$p_i(0)=p_i$；应用拉普拉斯变换（见§2·2）便可解方程组（3.30）。令$a_i(z)=\int_0^\infty e^{-zt}p_i(t)dt$，利用拉普拉斯变换的初等特性，便得

$$-p_j+za_j(z)=\sum_{i=0}^{N}\lambda_{ij}a_i(z),\quad j=0,1,\cdots,N.$$

根据克拉姆法则，解此方程组便得

$$a_i(z)=\Delta_i(z)/\Delta(z), \qquad (3.31)$$

式中 $\Delta(z)=$ $z\delta$ ， λ ， 在行列式中，用初始概率 p_i 代入行列式的第 i 行，便得到分子的行列式； δ_{ij}——克洛涅克尔（Кронекер）符号。依（2.29）式反演拉普拉斯变换，便得出过程状态概率的表达式。当然，当状态数很大时，可产生不可克服的计算困难。

现在介绍过程存在平稳分布的条件。如果存在序列 $i_1, \cdots, i_k$ 和 $j_1, j_2, \cdots$，且 $\lambda_{i i_1} \lambda_{i_1 i_2} \cdots \lambda_{i_k j} > 0$ 和 $\lambda_{j j_1} \lambda_{j_1 j_2} \cdots \lambda > 0$，则称状态 i 和 j 是连通的，亦即，以正概率由 i 向 j 转移。于是，所有这种状态集都属于连通状态类。如果过程到达此类状态后，并且永远停留在此状态，则称此过程叫作 状态 ，由此，下述结论是正确的。

当且仅当恰好有一个遍历类时，才存在与初始分布无关的平稳过程分布

$$\lim p_i(t) = p_i\text{。}$$

此时平稳概率满足方程组

$$\sum p_j \lambda_{ji} = 0 \quad i=0,1,\cdots,N;$$

$$\sum p_i = 1\text{。} \tag{3.32}$$

现在可以得出这样的结论：在可靠性理论模型中，马尔科夫过程特征就是主要的可靠性特征。令 A 是某一状态集。下面研究变量 $\tau_i(A) = \inf\{t: x(t) \in A, x(0)=i\}$ ——从时刻 0 的状态 i 到时刻 t 转移为 A 集的时间，其拉普拉斯变换中表达变量的分布很简单。记 $\varphi_i(z) = M e^{-z\tau_i(A)}$。于是，根据数学期望公式，有

$$\varphi_i(z) = \frac{\lambda_i}{z+\lambda_i}\left[\sum_{A} \frac{\lambda_{ij}}{\lambda_i} + \sum \frac{\lambda_{ij}}{\lambda_i} \varphi_j(z)\right]\text{。}$$

此方程是这样获得的：根据状态 i 求出指数分布的时间 的拉普拉斯变换为 $\lambda_i/(z+\lambda_i)$。然后再以概率 λ_{ij}/λ_i 转移到状态 j。如果 $j \in A$，则 $\tau_i(A) = \xi$；如果 $j \notin A$，则 $\tau_i(A) = \xi + \tau_j(A)$，和 $\tau(A)$ 在 变换所得的结果，便得到

$$\sum_{j \notin A} (z\delta_{ij} - \lambda_{ij})\varphi_j(z) = \lambda_i(A) = \sum_A \lambda_{ij}\text{，} \tag{3.33}$$

其中 $i \notin A$。此方程的解是有理分式，反演此分式便得所求 $\tau_i(A)$ 的分布。最后，将方程对 z 求导，并将 $z=0$ 代入其中，便得平均转移时间 $T_i(A) = M\tau_i(A) = -\varphi_i'(0)$，此时 满足方程组

$$\sum_{j \notin A} \lambda_{ij} T_j(A) + 1 = 0, \quad i \notin A\text{。} \tag{3.34}$$

令 $q_{ij}(A)$ 表示在初始时刻由状态 i 第一次转移到某个集时过程的状态为 $j \in A$ 的概率。那么，由上述方法不难写出概率方程如下：

$$\sum_{k \notin A} \lambda_{ik} q_{kj}(A) = -\lambda_{ij}, \quad j \in A, \; i \notin A\text{。} \tag{3.35}$$

现在来证明利用 $\tau_i(A)$ 和 T_i 可表示上述可靠性特征。令在初始时刻过程 $x(0)=0$（在可靠性理论模型中，它表示所有部件在初始时刻都处于正常状态），于是

$$\tau = \tau_0(E_-)\text{。} \tag{3.36}$$

由方程（3.35）解出概率 $q_{0j}(E_-)$。于是，根据全概率公式，便得

$$P\{\tau < t\} = \sum q_{0j}(E_-) P\{\tau_j(E_+) < t\}\text{。} \tag{3.37}$$

• 在同一 中

在首次更新时刻进入状态$i \in E_+$的概率，可根据全概率公式求出

$$\sum_{j \in E_-} q_j(E_-) q_{ji}(E_+) .$$

如果知道这些概率，便能求出τ'的分布和在首次故障时刻进入的那些状态的概率，于是便能得出τ_1''的分布，等等。我们将不按一般形式写出τ_k'和τ_k''的分布，因为这是一项非常繁琐的工作；此外，在工程上也要应用平稳过程内变量τ'和τ''。为了求出τ'和τ''的分布，我们引用两个概率：$q_i(E_+)$——在平稳状态下，在系统的更新时刻进入正常状态$i \in E_+$的概率；$q_i(E_-)$——在平稳状态下在系统处在故障时刻进入状态$i \in E_-$的概率。显然，在dt时间内由故障集E_-转移到正常集E_+的概率$q_i(E_+)$为

$$q_i(E_+) = \sum_{j \in E_-} p_j \lambda_{ji} \Big/ \left(\sum_{i \in E_+} \sum_{j \in E_-} p_j \lambda_{ji} \right)^{-1}, \tag{3.38}$$

同理

$$q_i(E_-) = \sum_{j \in E_+} p_j \lambda_{ji} \Big/ \left(\sum_{i \in E_-} \sum_{j \in E_+} p_j \lambda_{ji} \right) . \tag{3.39}$$

在这两个公式中，p_i——过程的平稳概率。现在可很容易地得到τ'和τ''的分布，

$$P\{\tau' < t\} = \sum_{i \in E_+} q_i(E_+) P\{\tau_i(E_+) < t\}, \tag{3.40}$$

$$P\{\tau'' < t\} = \sum_{i \in E_-} q_i(E_-) P\{\tau_i(E_+) < t\}, \tag{3.41}$$

以及系统剩余寿命τ的分布

$$P\{\tau < t\} = \sum_{i \in E_+} p_i P\{\tau_i(E_+) < t\}。 \tag{3.42}$$

若已知可靠性特征参数的分布，就能求出其均值

$$T_i = M\tau_i = T_i(E_+),$$

$$T' = M\tau' = \sum_{i \in E_+} q_i(E_+) T_i(E_+),$$

$$T'' = M\tau'' = \sum_{i \in E_-} q_i(E_-) T_i(E_+),$$

$$T = M\tau = \sum_{i \in E_+} p_i T_i(E_+)。 \tag{3.43}$$

最后，可用度为

$$K_r = \frac{T'}{T'' + T'} = \sum_{i \in E_+} p_i 。 \tag{3.44}$$

可以看出，所有这些分布的计算都可归结为求代数方程根的计算（这是极其繁重的计算）和按公式（2.20）反演有理分式，而求均值可归结为解代数方程组。

下面，介绍求均值T'和T''的一个简单方法。现在来研究故障流，亦即，过程由$E_+ \to E_-$的时刻流，流的强度$\Lambda = \sum_{i \in E_-} \sum_{j \in E_+} p_j \lambda_{ji}$。同时，此流的强度等于相邻两点间平均时间的倒数，即$\Lambda = 1/(T' + T'')$。将此方程同（3.44）联立，便可得出

$$T' = \frac{1}{\Lambda} \sum_{i \in E_+} p_i ;\quad T'' = \frac{1}{\Lambda} \sum_{i \in E_-} p_i 。 \tag{3.45}$$

正如下面将要看到的那样，这种方法也可用于某些非马尔科夫过程。

上面研究了有限状态齐次马尔科夫过程。对于可数状态马尔科夫过程来说，上述公式仍然正确（当然，用克拉姆法则解方程例外）。有限状态线性方程可推广到无限状态方程，但解起来就很困难了。

下面，研究用齐次马尔科夫过程描述可靠性理论中马尔科夫过程的几个特殊模型。

纯灭过程[44]　在上一节最后，我们研究不可修系统和依故障模型时，引入了两类马尔科夫过程——纯灭过程和广义纯灭过程。若状态为0,1,2,…,n…的齐次马尔科夫过程，当$j\neq i$，$j\neq i+1$时$\lambda_{ij}=0$，$\lambda_{i,i+1}=\lambda_i>0$和$\lambda_{ii}=0$，则此过程叫做**纯灭过程**。换言之，纯灭马尔科夫过程，依次经历状态0→1→2→…→n→…，而且过程在任一状态k逗留的时间ξ_k是独立同分布的：$P\{\xi_k>t\}=e^{-\lambda_k t}$。在可靠性理论中，此过程很受欢迎。因为如果假定每一部件的故障率仅仅与所在地位有关时，则此过程可用于描述不可修贮备系统的全部基本模型。

令$E_+=\{0,1,2,\cdots,n\}$——系统的正常状态集，$E_-=\{n+1,n+2,\cdots\}$——系统的失常状态集；又令初始状态$\kappa(0)=0$。因为，用纯灭过程描述不可修系统的性状，所以主要特征是无故障工作时间$\tau_0'=\tau_0(E_-)$。如上所述引与入$\tau_i(E_-)$，$Me^{-z\tau_i(E_-)}=\varphi_i(z)$。在这种情况下，方程（3.33）变为

$$-\lambda_i\varphi_{i+1}(z)+(z+\lambda_i)\varphi_i(z)=0,\quad i<n;\quad (z+\lambda_n)\varphi_n(z)=\lambda_n。$$

由此可得

$$\varphi_0(z)=Me^{-z\tau_0'}=\frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_n}{(z+\lambda_0)\cdots(z+\lambda_n)}。\tag{3.46}$$

反演此分式，便得到τ'的分布密度，再进行积分便得到可靠度函数

$$P(t)=P\{\tau'>t\}=\lambda_0\cdots\lambda_n\sum_{i=0}^{n}\frac{\exp(-\lambda_i t)}{\lambda_i\omega'(-\lambda_i)}。\tag{3.47}$$

式中　$\omega(x)=(x+\lambda_0)(x+\lambda_1)\cdots(x+\lambda_n)$。

由于无故障工作时间是独立随机变量之和$\tau_0'=\xi_0+\xi_1+\cdots+\xi_n$，所以平均无故障工作时间为

$$T=M\tau_0'=\frac{1}{\lambda_0}+\frac{1}{\lambda_1}+\cdots+\frac{1}{\lambda_n}。\tag{3.48}$$

（3.47）式不便应用计算机，当n很大时，尤其不便。在《可靠性理论的数学方法》[44]中，论述了τ'分布的双侧估计。其中最简单的估计公式是

$$\frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_n}{(n+1)!}t^{n+1}\left(1-\frac{1}{n+2}\sum_{i=0}^{n}\lambda_i t\right)\leqslant Q(t)\leqslant\frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_n}{(n+1)!}t^{n+1}。\tag{3.49}$$

由此式得出结论，为了计算可靠性可利用近似公式$Q(t)\approx\frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_n}{(n+1)!}t^{n+1}$，其相对误差不超过$\Delta\leqslant\frac{1}{n+2}\sum_{i=0}^{n}\lambda_i t$。

广义纯灭过程　如果说纯灭过程是描述由相同部件组成的不可修贮备系统性态的话，那么广义纯灭过程是描述由不同部件组成的不可修系统的性态。若马尔科夫过程的状态集为$E=\{\mathbf{e}\}$，$\mathbf{e}=(e_1,e_2,\cdots,e_n)$，$e_i=0$或1；故障率为$\lambda(\mathbf{e})$；状态变化只能是下述形式的瞬时转移（即跳跃）：

$$\mathbf{e}=(e_1,\cdots,e_{i-1},0,e_{i+1},\cdots,e_n)\to\mathbf{e}'=(e_1,\cdots,e_{i-1},1,e_{i+1},\cdots,e_n)。$$

则此过程叫做广义纯灭过程。这种状态转移的物理意义：部件i发生故障。如上所述，令E_+——系统处于正常状态集，E_-——系统处于故障状态集。通常假设这两个子集都是单调结构；在初始时刻所有部件都处于正常状态，亦即$\mathbf{e}(0)=\mathbf{0}=(0,0,\cdots,0)$。

为了计算系统的可靠性，可利用方程（3.35）。但是，这将使计算很繁琐。所以，建议采用另外一种方法。从0状态开始到系统发生故障时刻为止，过程所经历的状态序列叫做路π：

$$\pi=(0, e^{(1)}, e^{(2)}, \cdots, e^{(m)}), \quad e^{(k)}\in E_{+}, \ 当k<m, \ e^{(m)}\in E_{-}时。$$

在此路中，状态的每一次转移都是某一部件发生故障。为了完备起见，例如，假设在状态e时第i个部件已发生故障，就认为$\lambda_i(e)=0$，则总故障率$\lambda(e)=\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i(e)$。于是，由马尔科夫过程特性可得出结论，过程由状态$e=(e_1,\cdots,e_{i-1},0,e_{i+1},\cdots,e_n)$向状态$e'=(e_1,\cdots,e_{i-1},1,e_{i+1},\cdots,e_n)$转移的概率$p_i(e)=\lambda_i(e)/\lambda(e)$，亦即第$i$个部件发生故障。令序号$i_k$表示路$\pi$的状态由$e^{(k-1)}$转变为$e^{(k)}$。依全概率公式知，系统的故障概率

$$F(t)=P\{\tau_0'<t\}=\sum_{\pi}F(t|\pi)p(\pi). \tag{3.50}$$

式中 $p(\pi)$——路π中的所有部件都正常时的正常的概率，$p(\pi)=p_{i_1}(0)p_{i_2}(e^{(1)})\cdots p_{i_m}(e^{(m-1)})$；而$F(t|\pi)$——在路$\pi$正常的条件下在时间$t$内系统发生故障的概率。因为在每一状态过程逗留的时间都服从参数为λ的指数分布，所以在路π正常的条件下过程$e(t)$是强度为$\lambda(e^{(k)})$的纯灭过程。

将（3.47）式代入（3.50）式，便得出系统的故障概率。应用（3.48）式，不难求出

$$T_0'=\sum_{\pi}p(\pi)\left[\frac{1}{\lambda(0)}+\frac{1}{\lambda(e^{(1)})}+\cdots+\frac{1}{\lambda(e^{(m-1)})}\right] \tag{3.51}$$

由于路的数目一般很大，应用（3.50）式很不方便。由不等式（3.49）可很容易地得出不等式

$$F(t)\leqslant\sum_{\pi}\frac{\lambda_{i_1}(0)\lambda_{i_2}(e^{(1)})\cdots\lambda_{i_m}(e^{(m-1)})}{m!}t^m=S \tag{3.52}$$

其相对误差

$$[S-F(t)]/S\leqslant\max_{e\in E_-}\lambda(e)t$$

这就是说，如果在时间t内系统中一个部件发生故障的概率很小，则不等式（3.52）能很好地给出系统故障概率的近似值。下面，举例说明其应用。

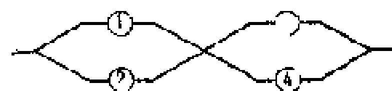


图 3.5

由四个部件组成的系统如图3.5所示，假定将编码信息同时输给部件1和2，它们平行地译码，根据信息采取决策，并送到部件3和4。3和4表示行地译码，并将新的决策按用途输出。设部件1和2在工作，其故障率$\lambda_1=0.0001$/小时，如果其中之一失效了，则正常部件的失效率变为$\lambda_1'=0.00015$/小时。

另外一对部件也一样，$\lambda_2=0.00005$/小时，$\lambda_2'=0.0001$/小时。求$t=1000$小时时系统的故障概率。为了估计可靠度，应用不等式（3.52）。此系统的最小路为(1,2),(2,1),(3,4),(4,3)和16条路(1,3,2),(2,3,1),(3,1,2),(3,2,1),(1,4,2),(2,4,1),(4,1,2),(4,2,1)…（如果改变一对部件的作用，便得到其余8条路）。在这里，给定一条路，就等于指出部件逐次发生故障的序号。将这些数据代入不等式（3.52），便求出

$$F(t)\leqslant2\frac{\lambda_1\lambda_1'}{2}t^2+2\frac{\lambda_2\lambda_2'}{2}t^2+8\frac{\lambda_1\lambda_1'\lambda_2}{6}t^3+8\frac{\lambda_2\lambda_2'\lambda_1}{6}t^3=0.02167.$$

而相对误差不超过0.3。

生灭过程 现在来研究概率论中广泛应用（排队论、生物学的数学模型、计量经济数学等）的生灭过程。在可靠性理论中，可应用此过程来描述相同部件的贮备系统的全部主要模型。此时，假设部件的故障率和修复率都只决定于部件在贮备系统中的位置或维修系统中对应的位置[44]。

对于有限状态或可数状态为$0,1,\cdots,k,\cdots$的齐次马尔过程来说，若$|i-j|>1$，在一瞬间过程只能向相邻的两个状态之一转移。此时$\lambda_{k,k+1}=\lambda_k$，$\lambda_{k,k-1}=\mu_k$，$\lambda_{kj}=0$。这种过程叫做生灭过程。此外，$\mu_0=0$，且如果状态是有限的，即等于$N+1$，则$\lambda_N=0$。对此过程的柯尔莫戈罗夫方程为

$$
\begin{aligned}
p_0'(t)&=-\lambda_0 p_0(t)+\mu_1 p_1(t),\\
p_k'(t)&=\lambda_{k-1}p_{k-1}(t)-(\lambda_k+\mu_k)p_k(t)+\mu_{k+1}p_{k+1}(t),\quad k=1,2,\cdots,N-1,\\
p_N'(t)&=\lambda_{N-1}p_{N-1}(t)-\mu_N p_N(t).
\end{aligned}
\tag{3.53}
$$

（对无限状态来说，不存在最后一个方程）。

使生灭过程的平稳分布与初始状态无关的必要条件[58]为

$$
\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{k-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}<\infty,\quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_k}=\infty.
\tag{3.54}
$$

（当然，对于有限状态总是存在平稳概率）这些平稳概率满足方程

$$
\begin{aligned}
0&=-\lambda_0 p_0+\mu_1 p_1,\\
0&=\lambda_{k-1}p_{k-1}-(\lambda_k+\mu_k)p_k+\mu_{k+1}p_{k+1},\\
0&=\lambda_{N-1}p_{N-1}-\mu_N p_N.
\end{aligned}
$$

为了解此方程组，我们引入新的未知变量$x_k=\mu_k p_k-\lambda_{k-1}p_{k-1}$。于是，方程组变为$x_0=0$，$x_k-x_{k+1}=0$，$x_{N+1}=0$，亦即，对所有$k$，都有$x_k=0$。由此可得

$$
p_k=\frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{k-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}p_0=\theta_k p_0.
$$

因为

$$
\sum p_k=1
$$

所以

$$
p_k=\frac{\theta_k}{\sum\limits_{j=0}^{N}\theta_j},\quad \theta_0=1,\quad \theta_k=\frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{k-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}
\tag{3.55}
$$

现在，应用生灭过程求出上述一般过程所求出的所有指标。此时，应用过程的特点可使计算较简便。因为在可靠性理论模型中，生灭过程的状态数就是系统中的失常部件数。所以，正常状态集和失常状态集分别为$E_+=\{0,1,\cdots,n\}$；$E_-=\{n+1,n+2,\cdots,N\}$。令$\tau_{ij}=\inf\{t:\kappa(t)=j\,|\,\kappa(0)=i\}$——系统由状态$i$转移到状态$j$的时间；$T_{ij}=M\tau_{ij}$——$\tau_{ij}$的均值。仍然假设初始状态$\kappa(0)=0$。不难看出，由$E_+$转移到$E_-$时，总是进入状态$n+1$；而由$E_-$转移到$E_+$时，总是进入状态$n$。所以

$$
\tau'=\tau_{0,n+1},\quad \tau_k'=\tau'=\tau_{n,n+1},\quad \tau_k''=\tau''=\tau_{n+1,n}.
\tag{3.56}
$$

此外，依平稳流理论[153]可得出结论

$$
P\{\tau>t\}=\frac{\sum\limits_{k=0}^{n}p_k}{T_{n,n+1}}\int_t^{\infty}P\{\tau_{n,n+1}>x\}\mathrm{d}x.
\tag{3.57}
$$

所以，计算可靠性特征的任务，就是求τ_i的分布。其次，我们假定生灭过程的状态为0，1，2，…，N的有限状态（在可靠性理论模型中，几乎总是这样假定）。先求由τ_{0k}的分布，记作$\varphi_{0k}(z)=Me^{-z\tau_{0k}}$。根据方程（3.5），函数$\varphi_{ik}(z)$（$i<k$）满足方程组

$$(z+\lambda_0)\varphi_{0k}-\lambda_0\varphi_{1k}=0,$$

$$-\mu_1\varphi_{0k}+(z+\lambda_1+\mu_1)\varphi_{1k}-\lambda_1\varphi_{2k}=0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$-\mu_{k-1}\varphi_{k-2,k}+(z+\lambda_{k-1}+\mu_{k-1})\varphi_{k-1,k}=\lambda_{k-1}.$$

令$\Delta(z)$——此方程组的行列式。依克拉姆法则，$\varphi_{0k}(z)=(\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{k-1})/\bar{\Delta}_k(z)$。按最末行的元素展开行列式$\bar{\Delta}_k$，便得到递推方程

$$\bar{\Delta}_k(z)=(z+\lambda_{k-1}+\mu_{k-1})\bar{\Delta}_{k-1}(z)-\lambda_{k-2}\mu_{k-1}\bar{\Delta}_{k-2}(z).$$

我们引入标准化行列式$\Delta_k(z)=\bar{\Delta}_k(z)/(\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{k-1})$。对此行列式，递推方程为

$$\Delta_k(z)=\left(1+\frac{z+\mu_{k-1}}{\lambda_{k-1}}\right)\Delta_{k-1}(z)-\frac{\mu_{k-1}}{\lambda_{k-1}}\Delta_{k-2}(z). \qquad (3.58)$$

其初始条件$\Delta_0(z)=1$，$\Delta_1(z)=1+z/\lambda_0$。于是

$$\varphi_{0k}(z)=Me^{-z\tau_{0k}}=1/\Delta_k(z). \qquad (3.59)$$

多项式$\Delta_k(z)$满足根据正交多项式[94]一般理论获得的下列特性：

$$\Delta_k(0)=1,\quad k=0,1,2,\cdots.$$

$\Delta_k(z)$的所有根是不同的，并且是负的。

相邻多项式的根是相互交替的，即在$\Delta_k(z)$的任意相邻两个根之间恰有$\Delta_{k-1}(z)$的一个根。

$\Delta_k(z)$的最大根模数不超过$\alpha_k=\sum_{i=0}^{k-1}(\lambda_i+\mu_i)$。这些特征提供了用计算机解根的方便算法。须知，当$i<k$时，

$$\tau_{ik}=\tau_{i,i+1}+\cdots+\tau_{k-1,k}. \qquad (3.60)$$

由于过程具有马尔科夫性，各加数是独立的。其和$\tau_{0k}=\tau_{0i}+\tau_{i,i+1}+\cdots+\tau_{k-1,k}$。因此，$\varphi_{0k}(z)=\varphi_{0i}(z)\varphi_{ik}(z)$，因而

$$\varphi_{ik}(z)=\Delta_i(z)/\Delta_k(z).$$

于是，依（3.60）式便求出

$$\varphi_{ik}(z)=\Delta_i(z)/\Delta_k(z). \qquad (3.61)$$

为了求当$i>k$时τ_{ik}的分布，现在来研究"倒置"过程$\hat{\kappa}(t)=N-\kappa(t)$。显然，这是与$\hat{\kappa}(t)$具有同一状态集、故障率$\hat{\lambda}_k=\mu_{N-k}$，$\hat{\mu}_k=\lambda_{N-k}$和当$i>k$时$\tau_{ik}=\hat{\tau}_{N-i,N-k}$的生灭过程。由此很易求出$\tau_{ik}$的拉普拉斯变换为

$$\varphi_{ik}(z)=Me^{-z\tau_{ik}}=\hat{\Delta}_{N-i}(z)/\hat{\Delta}_{N-k}(z). \qquad (3.62)$$

式中多项式$\hat{\Delta}_k(z)$满足递推方程

$$\hat{\Delta}_k(z)=\left(1+\frac{z+\lambda_{N-k+1}}{\mu_{N-k+1}}\right)\hat{\Delta}_{k-1}(z)-\frac{\lambda_{N-k+1}}{\mu_{N-k+1}}\hat{\Delta}_{k-2}(z),$$

$$\hat{\Delta}_0(z)=1,\quad \hat{\Delta}_1(z)=1+z/\mu_N.$$

下面，可写出可靠性的全部主要特征量表达式

$$\mathrm{M}e^{-z\tau'}=1/\Delta_{n+1}(z); \tag{3.63}$$

$$\mathrm{M}e^{-z\tau'_k}=\mathrm{M}e^{-z\tau''}=\Delta_n(z)/\Delta_{n+1}(z); \tag{3.64}$$

$$\mathrm{M}e^{-z\tau'_k}=\mathrm{M}e^{-z\tau''}=\hat{\Delta}_{k-1,n+1}(z)/\hat{\Delta}_{k,n}(z). \tag{3.65}$$

此外，由（3.57）式和拉普拉斯变换性质，可求得

$$\mathrm{M}e^{-z\tau}=\sum_{k=n+1}^{N}p_k+\sum_{k=0}^{n}p_k\frac{\Delta_{n+1}(z)-\Delta_n(z)}{zT_{n,n+1}\Delta_{n+1}(z)}. \tag{3.66}$$

对拉普拉斯变换在点0微分时，可求出所有这些特征量的均值。但是，我们希望用更简单的方法。由一般公式（3.45）得到

$$T'=\frac{1}{\lambda_n p_n}\sum_{k=0}^{n}p_k;\quad T''=\frac{1}{\lambda_n p_n}\sum_{k=n+1}^{N}p_k. \tag{3.67}$$

因为$T'=T_{n,n+1}$，可取任意状态为n，所以

$$T_{i,j}=\sum_{k=i}^{j-1}\frac{1}{\lambda_k p_k}\sum_{s=0}^{k}p_s,\quad 当 i<j 时， \tag{3.68}$$

其中

$$T_{0,n+1}=\mathrm{M}\tau'_0=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\lambda_k p_k}\sum_{s=0}^{k}p_s. \tag{3.69}$$

最后，由等式$\mathrm{M}\tau=\sum\limits_{k=0}^{n}p_k\mathrm{M}\tau_{k,n+1}$，很容易得到

$$T=\mathrm{M}\tau=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\lambda_k p_k}\Big(\sum_{s=0}^{k}p_s\Big)^2. \tag{3.70}$$

在用生灭过程所描述的可靠性理论模型中，通常参数λ、μ和阶n是这样的，即在过程状态经多次变化后，过程$\kappa(t)$很少进入E_-集。在这种情形下，阶n“很高”。但是，这同直观地提醒我们一样，系统无故障工作时间间隔，亦即过程处于E_+状态的时间间隔应渐近服从指数分布。在§2.1中已求出拉普拉斯变换的随机变量服从指数分布的条件。我们将这些结果应用于生灭过程。下面，首先研究标准值

$$\tau_{0,n+1}/T_{0,n+1}=\tau_0/T_{0,n+1}.$$

令$\Delta_{n+1}(z)=1+\Delta_{n+1,1}z+\Delta_{n+1,2}z^2+\cdots$。显然，$\Delta_{n+1,1}=T_{0,n+1}$，而对递推关系式（3.58）进行两次微分，就可求出

$$\Delta_{n+1,2}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\lambda_k p_k}\sum_{s=0}^{k}T_{0,s}p_s. \tag{3.71}$$

因为多项式$\Delta_{n+1}(z)$的所有根都是实数，所以由定理2.3可知，对所有$x\geqslant0$，存在

$$\left|P\left\{\frac{\tau_0}{T_{0,n+1}}>x\right\}-e^{-x}\right|\leqslant\frac{1-\sqrt{1-4a_2}}{1+\sqrt{1-4a_2}}. \tag{3.72}$$

式中$a_2=\Delta_{n+1,2}/\Delta^2_{n+1,1}$，而只要满足$a_2\to0$，就能使$\tau'_0/T_{0,n+1}$渐近服从指数分布。

现在来研究一次失效的工作时间τ_0。其拉普拉斯变换为

$$\mathrm{M}e^{-z\tau_0}=\frac{1+\Delta_{n1}z+\Delta_{n2}z^2+\cdots}{1+\Delta_{n+1,1}z+\Delta_{n+1,2}z^2+\cdots}.$$

显然，如果满足条件

$$\frac{\Delta_{n-1,2}}{\Delta_{n,1,1}^{2}}\to 0,\quad \frac{\Delta_{n,1}}{\Delta_{n+1,1}}\to 0, \tag{3.73}$$

以及标准变量$\tau_k'/M\tau_k'$满足定理2.5的条件，则τ_k'的分布就收敛为指数分布。

现在来研究系统处于失常状态的时间τ_k''。假设满足条件

$$\lambda_{n+1}/\mu_{n+1}\to 0. \tag{3.74}$$

对于可靠性理论模型来说，此条件是很自然的：部件的平均修复时间仅仅是其平均寿命的几分之一。令A——过程由状态$n+1$转移到状态n时的事件。其概率$P\{A\}=\mu_{n+1}/(\lambda_{n+1}+\mu_{n+1})$。于是，依全概率公式可知

$$P\{\tau_k''>t\}=\frac{\mu_{n+1}}{\mu_{n+1}+\lambda_{n+1}}P\{\tau_k''>t|A\}$$

$$+\frac{\lambda_{n+1}}{\mu_{n+1}+\lambda_{n+1}}P\{\tau_k''>t|\overline{A}\}\sim P\{\tau_k''>t|A\}=e^{-(\lambda_{n+1}+\mu_{n+1})t}. \tag{3.75}$$

亦即，τ_k''渐近服从指数分布。

最后要特别指出，可用与广义纯灭过程相似的方程来研究广义生灭过程。但，它需要已知部件的故障率$\lambda_i(e)$和维修率$\mu_i(e)$。然而，我们不能这样做，因此过程精确公式的推导很复杂，而进行渐近分析又没有意义。因为，还要对复杂的可修系统更普遍的模型做详细的渐近分析。

§3.4 一般可修贮备系统模型

问题的提出 到目前为止，大多数工程师在计算可修系统的可靠性时，都用马尔科夫法。亦即，利用有限状态齐次马尔科夫过程描述此系统的功能。但是，正如上一节所指出的那样，如果在其它部件的状态一定，以及部件的寿命和修复时间服从指数分布时，则可利用马尔科夫法。否则，系统状态变化过程不是马尔科夫过程。在§1.2中已谈过大多数实际部件的寿命非常近似指数分布。而修复时间远不服从指数分布。尽管如此，仍有许多工程师断定对于这种情形用马尔科夫法可得到较好的近似值。下面，我们将证明，用相同均值的指数分布代替真实分布时，会使可靠性特征量产生严重的失真。

例如，系统中各部件的故障是相依的——部件的故障率取决于其它部件的状态；而修复时间服从任意分布。一般说，描述该系统的状态相当复杂，且其可靠性特征量也无显式。利用随机过程模型法估计这些指标是很困难的。由于贮备系统的可靠性相当高，在系统两次故障间隔里的状态会多次转移。所以，即使用高速计算机也很难收集到系统发生故障的全部信息。然而，对大多数实际系统来说，平均修复时间远远小于平均寿命。因此，可用渐近法估计系统的可靠性特征量。在§2.2和§2.3中已给出了再生过程首次故障时间的渐近分布。现在，我们应用这些结果来分析可靠性理论的具体模型。

本节将研究**可修贮备系统的一般模型**。应用大规模维修理论来描述很方便。首先，维修系统有r个维修工和无限个等待维修要求组成。维修要求流（即故障流）是强度为λ_k的马尔科夫流。此流说明，在时刻t有k个部件要求维修，在时间间隔$(t, t+\Delta t)$内出现k个维修要

求的概率为$\lambda_k\Delta t+o(\Delta t)$，此概率与系统在时刻$t$之前的性态无关。其次，假定按部件发生故障的先后次序进行维修，且修复时间服从任意分布$G(x)=P(\eta<x)$。如果有维修要求到达时各维修工都被占用，则维修要求按到达先后次序排队。维修过程$\kappa(t)$表示时刻t的维修要求数，此过程的状态空间$E=\{0,1,2,\cdots\}$。假定初始时刻$\kappa(0)=0$，过程由状态n转移到$n+1$叫做系统发生故障。令$\tau=\inf\{t:\kappa(t)=n+1|\kappa(0)=0\}$——系统首次故障前的时间；$(\lambda_k,G,r,n)$——大规模维修理论模型，叫做一般可修贮备系统模型。

实际上，可用$\kappa(t)$描述可修贮备系统的各种标准模型的性态。在这些模型中，进入维修系统的维修要求——部件故障；维修工——维修单元；维修——修理；n——冗余量，即贮备部件数。当$\lambda_k=\lambda$时，系统是可修非工作贮备系统模型；当$\lambda_k=(n+1-k)\lambda$时，是可修工作贮备系统模型；而当$\lambda_k=\lambda+(n-k)\lambda'$时，是可修降额贮备系统模型，在此模型中贮备件处于降额状态，其故障率λ'较小，$\lambda'<\lambda$。一般可修贮备系统模型不包括其它贮备模型，如混合贮备模型和热贮备模型等[44]。

极限定理 不难看出，过程$\kappa(t)$是特殊的再生过程（见§2.3）。对此过程，自由周期服从参数为λ_0的指数分布。令事件A表示过程由状态n转移到$n+1$，q表示在一个再生周期里的故障概率。令$\bar{\lambda}=\max\limits_{k\leq n}\lambda_k$，而$T=\int_0^\infty x\mathrm{d}G(x)$——平均修复时间。

定理3.2 如果参数λ_k，r，n和分布$G(x)$随$\bar{\lambda}T\to0$变化，则

$$P\{\lambda_0q\tau>x\}\to e^{-x}. \tag{3.76}$$

证明 令T_0——过程$\kappa(t)$占有周期的平均时间。为了证明此定理，只须证明由条件$\bar{\lambda}T\to0$得出$\lambda_0T_0\to0$的结论。这样一来，由定理2.8便可得出（3.76）式的证明。

可用下述方法建立过程$\kappa(t)$的强过程$\hat{\kappa}(t)$：

在过程处于状态k的每一时间间隔，要求增加一个泊松流，此流的强度为$\bar{\lambda}-\lambda_k$。若用一个维修工代替r个维修工便可得到新的维修过程$\hat{\kappa}(t,\omega)$：在任何时刻t和ω时都存在$\kappa(t,\omega)\leq\hat{\kappa}(t,\omega)$。式中$\omega$是给定的这两个过程概率空间上的点。众所周知[69]，过程$\hat{\kappa}(t)$占用周期的平均时间$\hat{T}_0=T/(1-\bar{\lambda}T)$。由此可知，

$$\lambda_0T_0\leq\bar{\lambda}\hat{T}_0=\bar{\lambda}T/(1-\bar{\lambda}T).$$

如果$\bar{\lambda}T\to0$，则$\lambda_0T_0\to0$，由定理2.8可得

$$P\{\lambda_0q\tau>x\}\to e^{-x}.$$

定理证毕。

下面，求在某些补充条件下平均无故障工作时间$M\tau$的渐近估计。在§2.3中已经证明了在定理2.8的条件下$M\tau\sim1/\lambda_0q$。所以，均值的渐近估计就是对概率q的渐近估计。现在来研究在占用周期上过程$\kappa(t)$发生的故障。可将q写成$q=q_0+q_1$，式中q_0——在占用周期上沿单调轨迹发生故障的概率，即从占用周期开始到故障前过程依次经历状态$0,1,2,\cdots,n,n+1$时发生故障的概率；而q_1是沿非单调路发生故障的概率，即从占用周期开始到发生故障前过程只有一次向下突变。下面估计这两个概率。

令

$$m_k=\int_0^\infty x^k\mathrm{d}G(x)=M\eta^k.$$

在下述论证中，我们将不只一次地利用下述条件：参数λ、r和n是固定的，而分布$G(x)$的变化是

$$m_{k}\ldots,\ m_{n}^{k}\to 0. \tag{A}$$

为了减少对主要论点证明的困难，我们首先证明两个辅助定理。

辅助定理3.1 如果满足条件A，则

$$q_0\sim\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n I_{n,r}, \tag{3.77}$$

式中
$$I_{n,r}=\int_0^{\infty}\frac{x^{n-r}}{(n-r)!}\left[\int_x^{\infty}\bar{G}(t)\,dt\right]^{r}\frac{\bar{G}(x)}{(r-1)!}\,dx.$$

证明 可以很容易地计算沿单调轨迹发生故障的概率。

$$q=\lambda_1\cdots\lambda_n\int_{x_1}\cdots\int_{x_n}e^{-s}\,\bar{G}(x_1)\bar{G}(x_2-x_1)\cdots\bar{G}(x_n-x_{n-1})\,dx_1\cdots dx_n.$$

式中

$$s=\lambda_1x_1+\lambda_2(x_2-x_1)+\cdots+\lambda_n(x_n-x_{n-1}).$$

而$x_1,x_2,\cdots,x_n$——维修要求到达的时刻。概率的上限估计为

$$q\leqslant\lambda_1\cdots\lambda_n\int_{x_1}\cdots\int_{x_n}\bar{G}(x_1)\bar{G}(x_2-x_1)\cdots\bar{G}(x_n-x_{n-1})\,dx_1\cdots dx_n$$

$$=\lambda_1\cdots\lambda_n\int_{t_1}\cdots\int_{t_n}\bar{G}(t_1)\cdots\bar{G}(t_n)\,dt_1\cdots dt_n=\lambda_1\cdots\lambda_n I_{n,r}=q_0.$$

在向第二个时间间隔转移时，要进行变换：$t_1=x_1,t_2=x_2-x_1,\cdots,t_n=x_n-x_{n-1}$。首先，对变量$t_n,\cdots,t_{r+1}$积分；然后，对$t_1,t_2,\cdots,t_r$积分。于是，便可求出$I_{n,r}$。

为了取得下限估计，必须考虑$e^{-s}\geqslant 1-s$。于是，

$$q\geqslant\lambda_1\cdots\lambda_n\int_{t_1}\cdots\int_{t_n}(1-s)\,\bar{G}(t_1)\cdots\bar{G}(t_n)\,dt_1\cdots dt_n=\bar{q}_0.$$

在这里进行上述第一次估计时一样的代换。但是，这时

$$0\leqslant\frac{q_0-q}{q_0}\leqslant\frac{q_0-\bar{q}_0}{q_0}$$

$$=\frac{\displaystyle\int_{t_1>\cdots>t_n}\cdots\int(1-e^{-s})\,\bar{G}(t_1)\cdots\bar{G}(t_n)\,dt_1\cdots dt_n}{\displaystyle\int_{t_1}\cdots\int_{t_n}\bar{G}(t_1)\cdots\bar{G}(t_n)\,dt_1\cdots dt_n}$$

$$\leqslant\frac{\lambda\displaystyle\int_{t_1}\cdots\int_{t_n}t_1\bar{G}(t_1)\cdots dt_1\cdots dt_n}{\displaystyle\int_{t_1}\cdots\int_{t_n}\bar{G}(t_1)\cdots\bar{G}(t_n)\,dt_1\cdots dt_n}$$

$$= \frac{\bar{\lambda}\int_0^\infty \frac{t^n}{(n-1)!}\bar{G}(t_1)\mathrm{d}t_1}{T_{n}},$$

$$= \frac{\bar{\lambda}\int_0^\infty \frac{t^{n+1}}{(n-1)!(n+1)}\mathrm{d}G(t)}{\frac{T^n}{n!}} \sim \bar{\lambda}\frac{m_{n+1}}{T^n}.$$

由此可见，当满足条件A时

$$q_0 \sim q_0 = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n T_{n}.$$

证毕。

辅助定理3.2 如果满足条件A时，则

$$q_1 = o(q_0). \tag{3.78}$$

证明 令A_1——在占用周期的非单调轨迹发生故障的事件。现在来研究以下事件：

A_2——第$(n+2)$次维修要求到达时刻前（在占用周期开始时刻，到达第一次维修要求）占用周期没有结束；

A_3——象A_2一样，但不是对过程$\kappa(t)$，而是对于证明定理3.2时建立的强过程$\hat{\kappa}(t)$；

$$A_4 = \{\eta_0 + \eta_1 + \cdots + \eta_n > t_{n+1}\}.$$

式中 η_i——分布函数为$G(x)$的随机变量，t_{n+1}——参数为λ的泊松流第$n+1$个点到达的时刻。

不难理解，下述包含关系是正确的：$A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset A_4$，于是

$$q_1 = P\{A_1\} \leqslant P\{A_4\} = \int_0^\infty \frac{\lambda^{n+1}t^n}{n!}e^{-\lambda t}\bar{G}_{n+1}(t)\mathrm{d}t.$$

式中

$$\bar{G}_{n+1}(t) = P\{\eta_0 + \eta_1 + \cdots + \eta_n > t\}$$

$$\leqslant (n+1)P\left\{\eta_1 > \frac{t}{n+1}\right\} = (n+1)\bar{G}\left(\frac{t}{n+1}\right).$$

由此可知

$$q_1 \leqslant \int_0^\infty \frac{\lambda^{n+1}t^n}{n!}(n+1)\bar{G}\left(\frac{t}{n+1}\right)\mathrm{d}t$$

$$= C\int_0^\infty x^{n+1}\mathrm{d}G(x) = Cm_{n+1}.$$

式中 C——常数。如果满足条件A时，则

$$\frac{q_1}{q_0} \sim \frac{q_1}{\lambda_1\cdots\lambda_n T_{n}} \leqslant \frac{a}{\lambda_1\cdots\lambda_n T_{n}} \leqslant C_1\frac{m_{n+1}}{T^n} \to 0 \quad (C_1\text{——常数}).$$

证毕。

定理3.3 如果满足条件A，则

$$P\{\Lambda\tau > x\} \to e^{-x}. \tag{3.79}$$

式中 $\Lambda = \lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_n T_{n}$。

证明 首先，由于已知不等式$m_{n+1} \geqslant T^n \geqslant T_n$[43]，由条件$A$得出定理3.2的条件，即

$$P\{\lambda_0 q\tau > x\} \to e^{-x}.$$

其次，当满足条件A时，由辅助定理3.1和3.2得出结论，$\lambda_0 q\sim\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_n J_{n,r}=\Lambda$，从而

$$P\{\Lambda\tau_r>x\}\to e^{-x}.$$

定理证毕。

注意，定理的重要特殊情况：

当$r=n$时，即系统发生故障时维修要求没有等待。亦即，在可靠性理论中，每个发生故障的部件都能立即开始维修。在这种条件下

$$\Lambda=\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_n T^n/n!. \tag{3.80}$$

亦即，当平均修复时间一定的条件下，备用件无故障工作时间分布渐近地与修复时间的分布函数无关。亦即，具有渐近线不变的性质。

$r=1$——仅有一个维修工。于是

$$\Lambda=\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_n m_n/n!. \tag{3.81}$$

说明 在可靠性工程中，定理3.3的结果可以这样应用：如果$\lambda T\ll 1$(即在贮备系统中平均修复时间远远小于部件平均故障间隔时间），则近似公式

$$P\{\tau_r>t\}\approx e^{-\Lambda t} \tag{3.82}$$

是正确的。实际上，条件A表明最大修复时间与平均修复时间之差不应很大。

现举例说明，在利用马尔科夫法时，如果修复时间分布不是指数分布，而用均值相同的指数分布代替时，会引起可靠性特性发生失真的程度。令$n=3$，$r=1$，$\lambda_i=\lambda=0.02$/小时，则

$$G(t)=\begin{cases}0, & t\leqslant T;\\ 1, & t>T.\end{cases}\qquad T=1\text{ 小时}.$$

这时，平均修复时间仅为部件平均故障间隔时间的1/50。所以，可以利用近似公式(3.82)。系统的故障率渐近地等于

$$\Lambda=\lambda^4 m_3/6=\lambda^4T^3/6=8\cdot10^{-8}/3$$

如果利用马尔科夫法，用指数分布代替分布$G(x)$后，便得到$\Lambda'=16\cdot10^{-8}$/小时。亦即，平均寿命减少到1/6！

可靠性的双侧估计 极限定理同其它定理一样，其缺点是只能说明收敛性而不能说明收敛速度。因此，严格地说，如果不知道过程参数间的关系如何，就只能用（3.82）式进行估计。

在§2.3中，曾得到用特殊的再生过程（定理2.8，2.9）描述系统无故障工作概率的双侧估计。一般，双侧估计的概率没有显式，所以，在本节后面给出了用平稳过程的概率估计马尔科夫向上过程的概率。因为不难理解本节所研究的过程是马尔科夫向上过程。所以，对一般可修贮备系统模型，可用平稳过程概率作为可靠度双侧估计。这里只讨论两种极限情形下的估计：$r=1$，$r=n$。它们是可靠性工程中最重要的两种情形。

一个修理工的情形 为了使证明不致于过份复杂，首先假设$\lambda_k=\lambda_0$，一般情形的估计在后面介绍。

定理3.4 概率q满足不等式

$$b_n\leqslant q\leqslant b_{n-1}(1-\gamma)A_{n-1}(\gamma). \tag{3.83}$$

式中

$$b_k=\int_0^\infty\frac{\lambda^k x^k}{k!}e^{-\lambda x}\bar{G}(x)dx;$$

$$A_{n+1}(\gamma)=\sum_{k=0}^{n}(k+1)^{n}\gamma^{k}-\sum_{k=0}^{n-1}\Delta^{k}\cdot 1^{n}\frac{\gamma}{(1-\gamma)^{k+1}},$$

$$\gamma=a_0\int_0^{\infty}\lambda e^{-\lambda x}\bar{G}(x)dx, \qquad \Delta^{k}\cdot 1^{n}=\sum_{s=0}^{k}C_k^s(1+s)^{n}(-1)^{k-s}.$$

证明 首先，引入

$$a_k=\int_0^{\infty}\frac{(\lambda x)^k}{k!}e^{-\lambda x}dG(x)$$

——在实施一次修复的时间内，第k次维修要求到达的概率。再引入

$$b_k=\sum_{i=k+1}^{\infty}a_i=\int_0^{\infty}\frac{\lambda^{k+1}x^{k}}{k!}e^{-\lambda x}\bar{G}(x)dx$$

——在实施一次修复的时间内，大于k次维修要求到达的概率。q_k——在占用周期开始时有$k(k\leqslant n)$个维修要求且其中之一开始维修的条件下，在占用周期里过程进入状态$n+1$的概率。我们所求的概率$q=q_1$。过程$\nu(t)$在维修开始时刻的状态形成马尔科夫链，且q_k是由状态k进入状态$n+1$而不是进入状态0的概率。所以，利用已知方法[148]可写出方程组

$$q_k=b_{n-k}+\sum_{s=0}^{n-k}q_{k+s-1}a_s.$$

应用克拉姆法则解之，并经过一系列不复杂，但繁琐的变换，便得出

$$q=q_1=\frac{c_{n-1}}{1+c_0+c_1+\cdots+c_{n-1}}, \qquad (3.84)$$

式中

$$c(z)=\sum c_k z^k=\frac{a(z)}{1-b(z)}, \qquad (3.85)$$

$$b(z)=\sum_{k=0}^{\infty}b_k z^k=\int_0^{\infty}\lambda e^{-\lambda x(1-z)}\bar{G}(x)dx, \qquad (3.86)$$

其中$c_0=a_0/(1-a_0)=\gamma/(1-\gamma)$。

(3.84)～(3.86)式是q的精确解表达式，下面来求q的上限估计。可以说，幂级数

$$V(z)=\sum_{k=0}^{\infty}v_k z^k$$

是强函数

$$U(z)=\sum_{k=0}^{\infty}u_k z^k.$$

如果对于所有$k\geqslant 0$，$|u_k|\leqslant v_k$，则存在$U(z)\leqslant V(z)$。

不难看出，下述性质是正确的：如果$U_1(z)\leqslant V_1(z)$，$U_2(z)\leqslant V_2(z)$，则$U_1(z)+U_2(z)\leqslant V_1(z)+V_2(z)$和$U_1(z)U_2(z)\leqslant V_1(z)V_2(z)$。应注意，这些性质对形式级数是正确的，此级数在任意$z\neq 0$时发散——与强函数的关系，只是对应序列不等式的缩小形式。

设某一分布函数$F(x)$，则其k阶矩为

$$m_k=\int_0^{\infty}x^k dF(x)=k\int_0^{\infty}x^{k-1}\bar{F}(x)dx;$$

有

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{m_k}{k!}z^k.$$

是级数。于是，根据矩的不等式 $m_i m_j \leqslant m_{i+j}$，可以得出结论：当任意 $\alpha>0$ 和 $\beta>0$ 时，$\varphi(\alpha z)\varphi(\beta z)\ll\varphi[(\alpha+\beta)z]$。

现在，回到我们的任务上来。研究函数

$$b(z)=\int_0^\infty e^{\lambda zx}\lambda e^{-\lambda x}\bar{G}(x)\,dx=\gamma\int_0^\infty e^{\lambda zx}f(x)\,dx=\gamma\varphi(\lambda z).$$

式中 $f(x)=\lambda e^{-\lambda x}\bar{G}(x)/\gamma$ ——分布密度。显然，此密度有各阶矩。于是，由 (3.86) 式可得到

$$c(z)=\frac{b(z)}{1-b(z)}=\sum_{k=1}^\infty b^k(z)=\sum_{k=1}^\infty \gamma^k\varphi^k(\lambda z)\ll\sum_{k=1}^\infty\gamma^k\varphi(k\lambda z).$$

由此可得

$$c_m\leqslant\sum_{k=1}^\infty\gamma^k\int_0^\infty\frac{(k\lambda x)^m}{m!}f(x)\,dx$$

$$=\int_0^\infty\frac{\lambda^{m+1}x^m}{m!}e^{-\lambda x}\bar{G}(x)\,dx\sum_{k=0}^\infty(k+1)^m\gamma^k=b_m A_m(\gamma).$$

最后，得出

$$q=\frac{c_n}{1+c_0+c_1+\cdots+c_{n-1}}\leqslant\frac{c_{n-1}}{1+c_0}\leqslant(1-\gamma)b_{n-1}A_{n-1}(\gamma).$$

级数 $A_{n-1}(\gamma)$ 经欧拉变换可得到另一形式的级数表达式。不等式 (3.83) 左端是很明显的，因为 b_{n-1} 是沿单调轨迹的故障概率。定理证毕。

系1 由本定理和不等式

$$A_{n-1}(\gamma)\leqslant\sum_{k=0}^\infty 2^{k(n-1)}\gamma^k=\frac{1}{1-2^{n-1}\gamma},$$

可得出结论，当 $2^n\gamma\to0$ 时，则 $A_{n-1}(\gamma)\to1$，亦即，$q\sim q_0=b_{n-1}$。假定在临界转移时，给出过程的 λ、n 和 $G(x)$ 都是变化的。如果是定期维修，不难看出 $q\sim q_0$ 的必要条件是 $2^n\gamma\to0$。如果固定 n 而改变其它参数，则使 $q\sim q_0$ 的必要条件是 $\gamma\to0$。此外，容易证明，条件 $\gamma\to0$ 和 $\lambda\eta\xrightarrow{p}0$ 是等价的，式中 η——修复时间。这样一来，我们强化了定理 3.3的结果，即

$$\lim_{\lambda\eta\xrightarrow{p}0} P\{\lambda q\tau>x\}=e^{-x}. \qquad (3.87)$$

系2 不等式 (3.83) 可以减弱，也可以简化。首先，在系1中，得到的不等式 $b_{n-1}\leqslant q\leqslant b_{n-1}/(1-2^{n-1}\gamma)$。由于

$$m_k=\int_0^\infty x^k\,dG(x);$$

如果 $m_1<\infty$，则

$$\gamma\leqslant\lambda m_1=\rho \text{ 和 } b_{n-1}\leqslant q\leqslant b_{n-1}/(1-2^{n-1}\rho);$$

如果 $m_n<\infty$，则

$$b_{n-1}\leqslant\lambda^n\int_0^\infty\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\bar{G}(x)\,dx=\frac{\lambda^n m_n}{n!};$$

如果 $m_{n+1}<\infty$，则

$$b_{n-1}\geqslant\lambda^n\int_0^\infty\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}(1-\lambda x)\bar{G}(x)\,dx$$

$$\frac{\lambda^n m_n}{n!} - \frac{\lambda^{n+1} m_{n+1} n}{(n+1)!} > \frac{\lambda^n m_n - \lambda^{n+1} m_{n+1}}{n!}.$$

在这种情形下，双侧估计

$$\frac{\lambda^n m_n - \lambda^{n+1} m_{n+1}}{n!} \leqslant q \leqslant \frac{\lambda^n m_n}{n!(1-2^{n-1}\rho)} \tag{3.88}$$

是正确的。

说明 同理，当λ_i不同时，也可得到一般的概率不等式[13]。为得到相应的结果，我们引入一些符号。首先，研究故障率为λ_i的纯灭过程。令$p_{ij}(t)$ —此过程在时刻t由状态i变为j的概率，而$b_{ij}=\int_0^\infty p_{ij}(t)\,\mathrm{d}G(t)$。又令

$$\underline{\lambda}=\min_{k\leqslant n}\lambda_k, \qquad \bar{\lambda}=\max_{k\leqslant n}\lambda_k;$$

$$\bar{\gamma}=\bar{\lambda}\int_0^\infty e^{-\bar{\lambda}x}\bar{G}(x)\,\mathrm{d}x.$$

于是

$$b_{1n}=q_0\leqslant q\leqslant b_{1n}/A_{n-1}(\bar{\gamma}). \tag{3.89}$$

同样，b_{1n}的值也是可以估计的。如果存在$m_{n+1}=\int_0^\infty x^{n+1}\,\mathrm{d}\bar{G}(x)$，则

$$(\lambda_1\cdots\lambda_n)\left[\frac{m_n}{n!}-\bar{\lambda}\frac{m_{n+1}}{n!}\right]\leqslant b_{1n}\leqslant(\lambda_1\cdots\lambda_n)\frac{m_n}{n!}. \tag{3.90}$$

修理工无限的情形（r=m）。

定理3.5 如果存在均值$T=\int_0^\infty x\,\mathrm{d}G(x)$，则不等式

$$\underline{q}=\lambda_1\cdots\lambda_n\bar{\lambda}\int_0^\infty e^{-\bar{\lambda}x}\frac{\Psi^n(x)}{n!}\mathrm{d}x\leqslant q\leqslant\frac{\lambda_1\cdots\lambda_n}{n!}T^n \tag{3.91}$$

成立。式中$\Psi(x)=\int_0^x \bar{G}(t)\,\mathrm{d}t$。

证明 首先，求出q的下限估计。根据辅助定理3.1知

$$q_0\geqslant\lambda_1\cdots\lambda_n\int_{0<x_1}\cdots\int_{<x_n} e^{-\bar{\lambda}x_n}\bar{G}(x_1)\cdots\bar{G}(x_n)\,\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n.$$

积分后可得到q的下限

$$q\geqslant\lambda_1\cdots\lambda_n\int_0^\infty e^{-\bar{\lambda}x}\frac{\Psi^{n-1}(x)}{(n-1)!}\bar{G}(x)\,\mathrm{d}x=\lambda_1\cdots\lambda_n\bar{\lambda}\int_0^\infty e^{-\bar{\lambda}x}\frac{\Psi^n(x)}{n!}\mathrm{d}x=\underline{q}.$$

然后，求出q的上限估计。现在来研究$\lambda_{n+1}=0$的“截尾”修复过程。很明显，在首次故障时刻前，“截尾”过程与初始过程一致。平稳“截尾”过程的概率很容易求得。因为根据И·Н格瓦连科定理[45]此概率$p_k=\frac{(\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{k-1})}{k!}T^k p_0$与分布$G(x)$的形式无关。于是，由不等式（2.34）可得出

$$q\leqslant\frac{\lambda_n p_n}{\lambda_0 p_0}=\frac{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n T^n}{n!}=\bar{q}.$$

定理证毕。

系 现已弄清楚使$q\sim q_0$的充分条件。当

$$\frac{q}{\bar{q}}=\int_0^\infty \bar{\lambda} e^{-\bar{\lambda} x}\left[\frac{\Psi(x)}{T}\right]^n dx\to 1.$$

若记$\varphi(x)=1-\Psi(x)/T$，则

$$1\geqslant\int_0^\infty \bar{\lambda} e^{-\bar{\lambda} x}[1-\varphi(x)]^n dx\geqslant\int_0^\infty \bar{\lambda} e^{-\bar{\lambda} x}[1-n\varphi(x)]dx$$

$$=1-\frac{n}{T}\int_0^\infty (1-e^{-\bar{\lambda} x})\bar{G}(x)dx.$$

但是，只有当$\bar{\lambda}_T\xrightarrow{x}0$（见§2.3），积分

$$\frac{1}{T}\int_0^\infty (1-e^{-\bar{\lambda} x})\bar{G}(x)dx\to 0.$$

于是，当n固定不变时，为了使$q\sim q_0$，条件$\bar{\lambda}n\xrightarrow{x}0$是充分的。例如，稍弱一点的条件$\lambda t'\to 0$，便不能使$q\sim q_0$，还要指出，由上述结论可导出$q/\bar{q}\geqslant 1-n\bar{\lambda}m_2/2T$，于是双侧估计为

$$\frac{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n}{n!}T^n\left(1-\frac{n\bar{\lambda}m_2}{2T}\right)\leqslant q\leqslant\frac{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n}{n!}T^n. \tag{3.92}$$

首次故障后可靠性特征量的估计 以上研究了首次故障前无故障工作时间的渐近性；同理，也可研究首次故障后τ_k'，τ_k''，τ'，τ''和τ（§3.3中的符号）的可靠性特征量。

下面介绍渐近分析用到的基本概念。如果从占用周期开始到该周期发生故障前过程$\kappa(t)$单调递增，而在发生故障后过程$\kappa(t)$单调递减，则发生故障的时刻是有规律的。亦即，如果在发生故障前没有进行任何维修，在发生故障后到占用周期结束前也没有进行任何维修，则发生故障的时刻是有规律的。原来，当满足条件A时，故障是依概率1是有规律的。亦即，几乎所有故障都是渐近有规律的。在相邻故障间隔时间有规律的条件下，τ_k'和τ_k''的分布便不难计算，且可以渐近估计。

对上述渐近估计只介绍其结论，而不予论证。可以指出，论证过程与论证辅助定理3.1和3.2相似，详见[95]。

定理3.6 如果满足条件A，则对k一致存在

$$P\{\Lambda\tau_k'>x\}\to e^{-x}. \tag{3.93}$$

特别是

$$P\{\Lambda\tau'>x\}\to e^{-x}. \tag{3.94}$$

式中 Λ与定理3.3中的Λ相同。

我们来加强条件A^*。可以说系统（λ_k，ζ，γ，n）满足条件A是指对给定的参数γ、n和分布G，有n阶矩

$$m_n=\int_0^\infty x^n dG(x),$$

且故障率$\lambda_k=\lambda_k^{(0)}\varepsilon$。式中$\lambda_k^{(0)}$是常数，且$\varepsilon\to 0$。此时以下论断是正确的。

定理3.7 如果满足条件A^*，则对k一致存在

$$\lim_{\varepsilon\to 0}P\{\tau_k''<x\}=J_{n\gamma}(x),\ J_{n\gamma}, \tag{3.95}$$

式中

$$J_{n,r}(x)=\int_x^\infty \frac{(t-x)^{n-r}}{(n-r)!}\left[\int_0^t \bar G(u)\,du\right]^r \frac{\bar G(t)}{(r-1)!}\,dt;$$

特别是

$$\lim_{\varepsilon\to 0} P\{\tau''_\varepsilon > x\}=J_{n,r}(x)/J_{n,r}. \tag{3.96}$$

还应指出，如果在定理3.6和3.7中，将n换为$n+1$以加强条件A和A^*，则对于k一致存在不仅分布的收敛性成立，而且一阶矩也收敛：

$$M\tau'_\varepsilon \sim 1/A \tag{3.97}$$

$$M\tau''_\varepsilon \to J_{n+1,r}/J_{n,r}. \tag{3.98}$$

部件无故障工作时间服从任意分布的可修冷贮备系统模型　以上研究了贮备系统的可靠性，并假定部件的故障率与它工作了多少时间无关，而只与其它部件的状态有关。须知，每一部件的故障都独立且每一部件的寿命都服从指数分布的情况比较少。但，工程中这种情况是很少见的，在很多情况下部件寿命服从任意分布时，则对可靠性的渐近分析就复杂多了。

现在，我们来研究可修冷贮备系统模型。对此模型的可靠性特征量的渐近估计，即使在下述一般假设时，也能完成。假设系统由$n+1$个相同部件组成，在时刻$t=0$时，其中一个部件开始接通工作，而其余n个处于贮备状态，即等待工作。经过随机时间工作部件发生故障，在此时刻第一个贮备部件接通工作，同时故障部件送往具有r个修理工（$1\leqslant r\leqslant n$）的维修系统开始维修。又假定，修复后的部件达到更新水平，并装到系统中，排在最后一个贮备部件之后的位置上。处于工作状态下的部件工作一段时间后，照样发生故障，送修，而由第二个贮备部件接替工作，……。

假定每一修理工同时只能维修一个部件；如果有空闲的修理工，则对发生故障的部件能立即开始维修；如果所有修理工都在工作，则故障部件就要排队。最后，假设处于贮备状态的部件可靠性水平不会下降，不发生故障。

设每一部件无故障工作时间ξ都服从任意分布$F(t)=P\{\xi<t\}$，修复时间η都服从任意分布$G(t)=P\{\eta<t\}$；所有寿命和修复时间都是独立的。令(F,G,n,r)——可修冷贮备模型。所谓系统发生故障的时刻是指其n个部件处于故障状态，而第$n+1$个部件又发生故障的时刻。我们要研究的问题是确定系统首次故障时刻的渐近性态。假设部件的修复时间小于其无故障工作时间（正如已指出的，就可靠性理论模型来说，这种情况是普遍存在的）。通常，令过程$\nu(t)$等于在时刻t的故障部件数，那么不难发现此过程是再生过程，而再生点就是过程的状态由0转移为1的时刻。严格地说，这种过程是广义再生过程（因为首次故障时间分布同其它故障时间分布不同。然而，对于渐近分析，这是无关重要的）。对于这种过程，可采用§2.2中推广的理论。但是，其渐近分析比上述一般可修贮备系统模型的分析复杂得多。所以，这里仅介绍基本理论，而其论证可参阅[20]。

令τ是系统首次故障前工作时间，α是在一个再生周期里系统发生故障的概率，$F_k(t)=P\{\xi_1+\cdots+\xi_k<t\}$，式中$\xi_k$是独立同分布的，且分布都为$F(t)$。记

$$\alpha_k=\int_0^\infty \bar G(t)\,dF_k(t),\qquad \bar G(t)=1-G(t),$$

$$\alpha=\sum_{k=1}^\infty \alpha_k=\int_0^\infty \bar G(t)\,dH(t),$$

式中

$$H(t)=\sum_{k=1}^\infty F_k(t).$$

是更新函数。于是存在下述定理。

定理3.8 如果在模型（F、G、τ、n），参数t和α、分布F和G这样变化：① $\alpha\to 0$；② $\alpha_x>0$；③ 存在$\varepsilon>0$和$p>0$，$P\{\eta>\ \ -\varepsilon)\xi\}<p$；④ $q\xi/M\xi\overset{x}{\to}0$，则

$$P\{q\tau/M\xi>x\}\to e^{-x}. \tag{3.99}$$

定理3.9 如果在模型（F、G、τ、n），参数t和α、分布F和G是这样变化：① $\alpha_1\to 0$；② $\alpha_x>0$；③ 存在$\varepsilon>0$和$p>0$，使$P\{\eta\leqslant(1-\varepsilon)\xi\}>p$；④ $q\xi/M\xi\overset{x}{\to}0$，则

$$P\{q\tau/M\xi>x\}\to e^{-x}. \tag{3.100}$$

定理3.10 如果在模型（F，G，τ，n）中，参数α、分布F和G是这样变化的：① $\alpha\to 0$；② $\alpha_x>0$；③ $q\xi/M\xi\overset{x}{\to}0$，则

$$P\{q\tau/M\xi>x\}\to e^{-x}. \tag{3.101}$$

定理3.11 如果在模型（F,G,τ,n）中，① 固定F，且有密度$f(x)=F'(x)$，$x\leqslant c$和$f(+0)=\lambda>0$；② 分布$G(x)$的形式为$G(x)=G_0(x/\varepsilon)$，其中G_0是给定的，且$\varepsilon\to 0$；③ 存在$n+1$阶矩，$m_{n+1}=\int_0^\infty x^{n+1}dG_0(x)$，则

$$q\sim\lambda^{n}I_{n+1} \tag{3.102}$$

式中I_n是在辅助定理3.1中定义的。

§3.5 复杂可修系统的可靠性模型

模型描述 现在来研究由n个两状态（正常或故障）部件组成的系统。

如上所述，所有部件的状态都用二值向量$e(t)=[e_1(t),e_2(t),\cdots,e_n(t)]$表示。假设系统的状态（正常或故障）是其部件状态的单调函数。与此相应的所有状态集$E=\{e\}$可划分为两个子集：$E=E_+ + E_-$，假定这种划分为单调结构；第i个部件的故障率λ_i只决定于系统中其它部件的状态e，记作$\lambda_i(e)$。如果第i个部件已有故障，则认为$\lambda_i=0$，并记作$\lambda(e)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(e)$。

现在假设部件一发生故障就立即送往维修厂要求维修（以后简称要求），维修厂是由n个不同修理工组成的。每一修理工都只能维修与之对应的一个部件，而且他只能同时维修一个部件。如果某修理工空闲，则可立即接受对应的故障部件进行修理，而且一经开始修理就不会中断，直到修好装回系统为止。令η_i——第i个修理工维修第i个部件的时间，完成维修任务的概率$P\{\eta_i<t\}=G_i(t)$。

利用上述方式建立的随机过程e(t)描述复杂系统的状态。显然，此随机过程是特殊的再生过程，过程e(t)在e=(0,0,0,…,0)的时间服从参数为$\lambda(0)$的指数分布。此过程是马尔科夫向上过程。所以，可利用§2.3所给出的全部稳定结果和估计方法。此系统可靠性的主要特征量：系统首次故障前工作时间$\tau=\inf\{t:e(t)\in E_-|e(0)=0\}$。一般，$\tau$的分布无有限形式。然而，如上所述对可靠性特征量的估计可用渐近法。因为对这种模型的渐近分析，与上面讲的一般可修贮备系统模型非常相似，又不涉及新概念，我们只介绍分析结果，其证明可参阅[47]。

现引入一些符号，令

$$\bar{\lambda}=\max_{e\in E_+}\lambda(e);\qquad G(x)=\min_i G_i(x);\qquad \Gamma=\int_0^\infty x\,dG(x)。$$

q是在再生周期里系统发生故障的概率。

渐近定理

定理3.12

$$\lim_{\bar{\lambda}\Gamma\to 0}P\{\lambda(0)q\tau_+>x\}=e^{-x}。\tag{3.103}$$

在介绍估计q的第二个定理前，先引入一些概念和符号。如以前所述，所谓路π是指从占用周期开始到在该周期内系统发生故障的时刻止过程所经历的状态集$\pi=\{0,e^{(1)},e^{(2)},\cdots,e^{(m)}\}$。当$k<m$时$e^{(k)}\in E_+$。所有路的集合记作$\Pi$，而数$m=m(\pi)$叫做路长。如果$0<e^{(1)}<e^{(2)}<\cdots<e^{(m)}$，则此路叫做单调路，每一单调路都有相应的故障部件序号序列$i_1,i_2,i_3,\cdots,i_m$（i_k——系统的状态由$e^{(k-1)}$转移为$e^{(k)}$时发生故障的那个部件的序号）。如果$\lambda_{i_1}(0)\lambda_{i_2}(e^{(1)})\cdots\lambda_{i_m}(e^{(m-1)})>0$，则该单调路叫做允许单调路，即，具有正概率的过程$e(t)$通过此路。令$m_0=\min_\pi m(\pi)$，即沿所有单调允许路取最小路。数$m_0$有时也叫做系统的最小余度。最后，如果$m(\pi)=m_0$，则此单调允许路$\pi$叫做最小路。所有单调允许最小路的集记作$\Pi_0$。

定理3.13 如果

① 函数$G_{ij}(x)$，部件数n和修理工r是给定的；

② 存在m_0阶矩$\int_0^\infty x^{m_0}dG(x)$；

③ 部件i的故障率$\lambda_i(e)=\lambda_i^*(e)\varepsilon$，其中$\lambda_i^*(e)$是给定的，而$\varepsilon\to 0$，则

$$\lim_{\varepsilon\to 0}P\{\Lambda\tau>x\}=e^{-x}\tag{3.104}$$

式中
$$\Lambda=\sum_{\pi\in\Pi_0}\lambda_{i_1}(0)\lambda_{i_2}(e^{(1)})\cdots\lambda_{i_{m_0}}(e^{(m_0-1)})J_\pi$$

$$J(\pi)=\int_0^\infty\cdots\int_0^\infty\prod_{l=1}^{r}G_{k_l i_{k_l}}(t_l)dt_1\cdots dt_{m_0}。$$

在这里$k_1=1<k_2<\cdots<k_r$——在送修部件中开始修理时刻的部件序号；i_{k_l}——部件k_l到达修理工j的序号。

由此可见，此定理的表达很繁琐。为了说明定理的作用，现介绍几种特殊情形

1．令$G_{ij}(x)=G(x)$，即每一修理工可接受任何部件进行维修，于是

$$\Lambda=\sum_{\pi\in\Pi_0}\lambda_{i_1}(0)\cdots\lambda_{i_{m_0}}(e^{(m_0-1)})J_\pi。\tag{3.105}$$

2．对情形1的条件补充：如果$e_i=0$，$\lambda_i(e)=\lambda_i$，于是

$$\Lambda=\sum_{\pi\in\Pi_0}J_\pi\cdot m_0!\lambda_{k_1}\lambda_{k_2}\cdots\lambda_{k_{m_0}}。\tag{3.106}$$

式中$k_1<k_2<\cdots<k_{m_0}$——在状态$e^{(m_0)}$时发生故障的那些部件的序号，对所有$e^{(m_0)}$取和的状态就是单调允许路Π_0的最后状态。

3．对情形1的条件再补充$E_+=\{e: |e|<m_0\}$，$\lambda_i(e)=\lambda(|e|)$，其中$|e|=\sum_{i=1}^{n}e_i$。这就是说，所有部件在系统中是对称的。

$$\Lambda=\lambda(0)\lambda(1)\cdots\lambda(s-1)T_s\cdots. \tag{3.107}$$

在这种情况下，描述过程 $e(t)$ 与描述一般可修贮备系统模型的过程 $\kappa(t)$ 是一致的。

4．假设每一部件都有其修理工，亦即

$$G_{i,l}(t)=G_i(t),\qquad T_i=\int_0^\infty t\mathrm{d}G_i(t).$$

如果 $e_i=0$，则 $\lambda_i(\mathrm{e})=\lambda_i$。于是

$$\Lambda=\sum_{(m_0)}\lambda_{k_1}\cdots\lambda_{k_{m_0}}T_{k_1}\cdots T_{k_{m_0}}\left(\frac{1}{T_{k_1}}+\cdots+\frac{1}{T_{k_{m_0}}}\right). \tag{3.108}$$

式中角标 $k_1,k_2,\cdots,k_{m_0}$ 以及求和的方法与公式（3.106）相同。

一个部件有一个修理工的可修系统可靠性双侧估计　现在求上述情形4的可靠性双侧估计。这种情形表明，在有 n 个独立部件的系统中，每一部件的故障与其它部件的故障无关，故障率为 λ_k，修复时间分布函数为 $G_k(x)$。记

$$T_k=\int_0^\infty t\mathrm{d}G_k(t),\qquad M_k=\int_0^\infty t^2\mathrm{d}G_k(t).$$

首先，求概率 q 的双侧估计，因为，过程是状态 $\mathrm{e}(t)$ 马尔科夫向上过程，很容易求出其平稳概率，又因为部件 i 的状态是独立的，所以

$$p(\mathrm{e})=\prod_{i=1}^n\frac{(\lambda_iT_i)^{e_i}}{1+\lambda_iT_i},\qquad 0^0=1.$$

下面，应用不等式（2.34）估计系统故障概率上限。令 $\lambda(\mathrm{e})=\Sigma\lambda_i(\mathrm{e})$，$\mathrm{e}\in E_+$，——系统在临界状态 e 的总故障率（由于第 i 个部件的故障率为 $\lambda_i(\mathrm{e})$，系统的故障率等于各部件的故障率之和）；令 $\Gamma_+=\{\mathrm{e}:\lambda(\mathrm{e})>0\}$ ——正常临界状态集，即在此状态下只要再有一个部件发生故障，系统就会变为故障状态 E_-。由（2.31）式可直接得到系统故障概率 q 的上限估计，

$$q\leqslant\sum_{\mathrm{e}\in\Gamma_+}\frac{\lambda(\mathrm{e})}{\Lambda(0)}\prod_{i=1}^n(\lambda_iT_i)^{e_i}.$$

沿单调轨迹求故障概率的下限估计，令 $\mathrm{e}\in\Gamma_+$，并且在状态 e 中故障部件序号为 $i_1<i_2<\cdots<i_m$。沿进入状态 e 的单调路求出系统的故障概率，然后，当第 i_{m+1} 个部件发生故障时，进入一定的状态 e'：

$$\begin{aligned}&q_0(i_1,\cdots,i_m,i_{m+1})\\&=\int_0^\infty\lambda_{i_{m+1}}\exp(-\lambda_{i_{m+1}}t)\prod_{k=1}^m\int_0^t\lambda_{i_k}\exp(-\lambda_{i_k}(t-x))G_{i_k}(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\&=\lambda_{i_1}\cdots\lambda_{i_{m+1}}\int_0^\infty\exp(-\sum_{k=1}^{m+1}\lambda_{i_k}t)\prod_{k=1}^m\int_0^t\exp(\lambda_{i_k}x)\bar{G}_{i_k}(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

记 $\lambda=\sum_{k=1}^n\lambda_k$，并估计最后的积分

$$\begin{aligned}&q_0(i_1,\cdots,i_m,i_{m+1})\\&\geqslant\lambda_{i_1}\cdots\lambda_{i_{m+1}}\int_0^\infty e^{-\lambda t}\prod_{k=1}^m\int_0^t\bar{G}_{i_k}(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\&=\lambda_{i_{m+1}}\prod_{i=1}^n(\lambda_iT_i)^{e_i}\int_0^\infty e^{-\lambda t}\prod_{k=1}^n\left[\frac{1}{T_k}\int_0^t\bar{G}_k(x)\mathrm{d}x\right]^{e_k}\mathrm{d}t\end{aligned}$$

$$\geqslant \lambda_{i_{m+1}} \prod_{i=1}^{n} (\lambda_i T_i)^{e_i} \int_0^\infty e^{-\lambda t}\left[1-\sum_{k=1}^{n} \frac{e_k}{T_k} \int_t^\infty G_k(x)\,dx\right]dt.$$

在这里，我们利用了著名的不等式

$$\prod_{i=1}^{n}(1-\alpha_i) \geqslant 1-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i,$$

并估计最后的积分

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}\int_t^\infty G_k(x)\,dx\,dt \leqslant \int_0^\infty\int_t^\infty G_k(x)\,dx\,dt = \frac{1}{2}M_k,$$

可得

$$q_0(i_1,\cdots,i_m,i_{m+1}) \geqslant \frac{\lambda_{i_{m+1}}}{\lambda}\prod_{i=1}^{n}(\lambda_i T_i)^{e_i}\left(1-\sum_{k=1}^{n}\frac{\lambda M_k}{2T_k}e_k\right).$$

如果按序号i_{m+1}求此不等式之和，则$\sum\lambda_{i_{m+1}}=\lambda_-(e)$。于是，对所有的$e\in\Gamma_+$求和，就得到下限估计

$$q_0 \geqslant \sum_{e\in\Gamma_+}\frac{\lambda_-(e)}{\lambda}\left[1-\sum_{k=1}^{n}\frac{\lambda M_k}{2T_k}e_k\right]\prod_{i=1}^{n}(\lambda_i T_i)^{e_i}.$$

将上下限估计合并，最后得

$$\sum_{e\in\Gamma_+}\frac{\lambda_-(e)}{\lambda}\left[1-\sum_{k=1}^{n}\frac{\lambda M_k}{2T_k}e_k\right]\prod_{i=1}^{n}(\lambda_i T_i)^{e_i}$$

$$\leqslant q_0 \leqslant \sum_{e\in\Gamma_+}\frac{\lambda_-(e)}{\lambda}\prod_{i=1}^{n}(\lambda_i T_i)^{e_i}. \qquad (3.109)$$

现在计算忙期的平均时间T_0。

因为 $$\frac{1}{1+\lambda T_0}=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\lambda_i T_i},$$

所以 $$\lambda T_0=\prod_{i=1}^{n}(1+\lambda_i T_i)-1.$$

由此，根据不等式(2.29)，可得

$$e^{-\lambda t}\leqslant P\{\tau>t\}\leqslant e^{-\lambda t}+\prod_{i=1}^{n}(1+\lambda_i T_i)-1. \qquad (3.110)$$

我们得到了对可靠性简单而精确的估计。必须指出，对于这种系统，即使各部件寿命服从任意分布，也能毫无困难地求出可靠性的平均稳态特征量T'和T''（§3.3中的符号）。这种极其有益的方法，我们已用于马尔科夫过程。现在，将此方法用于明显的非马尔科夫过程。

这样，假设系统由n个独立部件组成，$F_i(t)$——第i个部件无故障工作时间分布函数；$G_i(t)$——第i个部件修复时间分布函数。于是

$$T_i=\int_0^\infty t\,dF_i(t), \qquad T_i(p)=\int_0^\infty t\,dG_i(t).$$

过程$e(t)=[e_1(t),\cdots,e_n(t)]$的分量是独立的交替过程[78]，可很容易地求出平稳概率

$$p(e)=\prod_{i=1}^{n}\frac{\rho_i^{e_i}}{1+\rho_i}.$$

式中 $$\rho_i=T_i(p)/T_i.$$

系统的可用度等于平稳状态系统处于正常状态的概率

$$K_r = \sum_{e \in E_+} p(e).$$

另一方面，由过程e(t)的遍历性可得出结论：$K_r = T'/(T'+T'')$，由此得到第一个方程

$$\frac{T'}{T'+T''} = \sum_{e \in E_+} p(e).$$

现在来求在无限小的时间间隔dt内，平稳状态系统的故障概率。为此，必须使此时间间隔的开始时刻过程处于某正常状态e，并且在dt内某一部件i发生故障使系统发生故障。此事件的概率等于

$$\frac{dt}{T_i + T_i^{(b)}} \prod_{k \neq i} \frac{c_k^{e_k}}{1 + c_k} = p(e) \frac{1}{T_i} dt.$$

现在，求所有$e \in E_+$之和以及所有i之和，便得

$$\sum_{e \in E_+} p(e) \sum_{i \in A(e)} \frac{1}{T_i} dt.$$

式中$A(e)$是使过程由正常状态e转移为故障状态时，所有部件的序号集。而dt的系数$1/T$是平稳状态系统故障流的强度，它等于系统在平稳状态时平均故障间隔时间$T'+T''$的倒数。由此可见，考虑到以上导出的等式，便得到方程组

$$\frac{T'}{T'+T''} = \sum_{e \in E_+} p(e),$$

$$\frac{1}{T'+T''} = \Lambda_0 = \sum_{e \in E_+} p(e) \sum_{i \in A(e)} \frac{1}{T_i}.$$

解此方程组，便得到平均值为

$$T' = \frac{1}{\Lambda_0} \sum_{e \in E_+} p(e), \qquad (3.111)$$

$$T'' = \frac{1}{\Lambda_0} \sum_{e \in E_-} p(e). \qquad (3.112)$$

第二篇　可靠性试验数据处理的分析统计模型法

第四章　可靠性试验数据的处理方法

§4·1　可靠性试验方案

Б型和B型方案　可靠性数学理论基本假设之一：产品发生故障的时间是随机变量。通常，无故障连续工作时间分布函数$F(t)$是未知的。$F(t)$的信息，可通过专门的可靠性试验或收集并进一步处理产品运行时积累的数据获得。在第四—六章里，主要研究不同可靠性试验方案试验数据处理的统计方法。这时，假设试验的产品与使用的产品型号相同，产品试验的条件与其工作条件相同。至于产品可靠性特征量由一种条件向另一种条件换算的问题，将在§7·2中讨论。

下面经常使用"产品"这一术语，在具体问题中，产品可以是一个部件或系统等，即"产品"的内涵比部件或系统更丰富。约定，无论是对同型或同批部件的试验，还是对由不同部件组成的同型子系统或系统的试验，都称之为产品试验。

实践表明，产品试验可以按各种不同的方案进行。采用某一方案的原因也是各种各样的。例如，试验设备的特点、试验状态，有时甚至是试验数据处理方法所产生的特殊条件等。一般，产品可靠性试验数据的处理方法，是根据试验的数学模型来确定的。

在拟定试验的诸问题中，最重要的是选择试验方案。如果要求产品在各种条件下都应正常工作，那么在进行可靠性试验时就应该考虑到这一点。将受试产品分成若干组，各组应在某一组条件下进行试验。产品的合理分组和各组试验条件的选择，是可靠性数学理论的重要课题，即拟定方案的理论。还要再次强调指出，本章将不讨论试验的具体条件的确定问题，认为假定这些条件是预先给定的。

进行试验、记录发生故障的时间和确定停止试验的时间所依据的一整套规则，称之为可靠性**试验方案**，记作П。试验方案可分为Б型和B型两大类。Б型方案的特点是无替换的，即在试验中产品一旦发生故障，就将其剔除，不准用同型合格产品更换，并继续试验；而B型方案的特点是有替换的，即在试验中产品一旦发生故障就用同型新产品替换，并继续试验。当试验设备非常复杂使试验费用很高，而发生故障的产品很容易被发现，且能用合格的同型产品替换时，应采用B型方案。

从组织试验的观点来看，由下述条件所决定的方案是最简单的。

1. 在$t=0$时开始，取N个产品进行试验；
2. 无替换的；

③ 定时截尾试验，即试验到时间 $t=T$ 时结束。这时可能有两种情况，或者是到了 $t=T$ 时，产品未完全发生故障，按规定而停止试验，或者是试验到 $t<T$ 时，全部产品都已发生故障了。

由条件①—③所决定的方案叫做无替换定时截尾试验方案，记作[N,Б,T]。

若用③′表示在发生 r 个故障时结束试验，则符合条件①，②，③′的方案叫做无替换定数截尾试验方案，记作[N,Б,r]。[N,Б,r]方案有一个缺点：当产品的平均寿命很长时，$t_{(r)}$ 会很大。然而，这种方案仍被广泛地应用。因为在估计可靠性特征量时，用[N,Б,r]方案比用[N,Б,T]方案更简便。

将停止试验的条件③和③′结合起来，就可以得到一种新方案。例如，把停止试验的时间确定为 $\min(t_{(r)},T)$。这时，连同条件①和②一起，就得到[N，Б，(r，T)]方案。对Б方案来说，或者是在发生 r 次故障时停止试验，或者是在时刻 T 时停止试验（若在时刻 T 之前仍未发生 r 次故障的话）。也可以把停止试验的时刻确定为 T 之后发生 k 次故障的时刻。这时，在时刻 T 之前进行的试验，与[N,Б,T]方案相似，而在时刻 T 之后，继续进行试验，一直到或者在时刻 T 之后的故障数等于 k，或者在最后一个受试产品发生故障，这种方案叫做混合方案，记作[N，Б，$T^{(k)}$]。例如，若在较长的时刻 T 内，或反之在时刻 T 之后发生第一次故障的时刻，全部 N 个产品都发生故障了，则对于[N,Б,$T^{(1)}$]方案，在时刻 T 停止试验。很明显，如果假设 $T=\infty$，则[N,Б,N]方案与[N,Б,T]方案完全相同。

设条件②′为试验中某产品发生故障，用同型新产品进行替换（假设替换是瞬时完成的），并继续试验。这种用条件②′代替②的方案称为有替换试验方案。与上述方案相似，有替换的试验方案也可分为[N,B,T]、[N,B,r]、[N,B,(r,T)]、[N,B,$T^{(k)}$]方案。

在应用B型方案试验时，必须有一定的备份产品，以便在受试产品发生故障时更换。

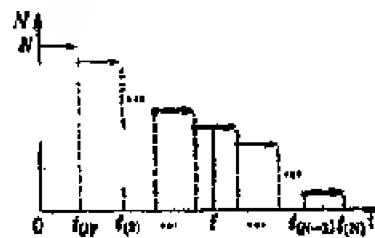


图 4.1

还有一个很重要的特征可作为确定某种试验方案的根据。假定以 $N(t)$ 表示时刻 t 受试产品数。对Б型方案来说（如图4.1），在每次故障之后 $N(t)$ 都减小1。因此，若以 $d(t)$ 表示时刻 t 前的故障产品数，则 $N(t)=N-d(t)$。而对B型方案来说，$N(t)=N$。函数

$$S(t)=\int_0^t N(s)\mathrm{d}s$$

称为**总工作时间**。对[N,Б,T]、[N,Б,r]、[N,Б,(r,T)]、[N,Б,$T^{(k)}$]方案来说，总工作时间为

$$S(t_{(r)})=t_{(1)}+\cdots+t_{(d)}+N(t)t. \tag{4.1}$$

在时刻 t 停止试验，称 $S(t)$ 为**全部总工作时间**或简称**总工作时间**。例如，对[N,Б,r]方案来说，总工作时间为

$$S(t_{(r)})=t_{(1)}+\cdots+t_{(r-1)}+(N-r+1)t_{(r)}. \tag{4.2}$$

B型方案结束试验的时间，可以根据给定的总工作时间 S_0 来确定。这时，[N,B,S_0]方

案由条件①、②和条件③来确定。即，若总工作时间$S(t_0)=S_0$，则在时刻t_0停止试验；若$S(t_{(N)})<S_0$，在最后一个产品发生故障的时刻$t_{(N)}$停止试验。

对[N,Б,(r,HS$_0$)]方案来说，停止试验的时刻为min($t_{(r)}$,t_0)，而t_0满足$S(t_0)=S_0$。对[N,Б,HS$_0^{(1)}$]方案来说，停止试验的时刻为min($t_{(N)}$,$t_0^{(1)}$)，其中$t_0^{(1)}$表示$S(t_0)=S_0$之后发生第一次故障的时刻。

停止试验的时刻大多可以用一般方法给出。下面研究平面坐标系上的点(t,d)集，其中$t\geqslant 0$，$d=0,1,2,\cdots$（图4·2），并给出边界集G。把停止试验的时刻确定为曲线(t,$d(t)$)首次达到边界集G某点的时刻。一般，G的边界用闭曲线给出。亦即，任意曲线在有限时间内达到G。应注意，边界点或者是离散的，或者是连续的线段。由离散点(d,T)

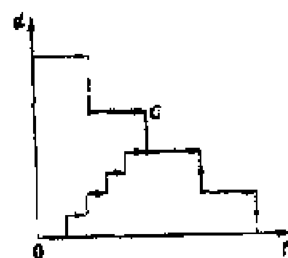
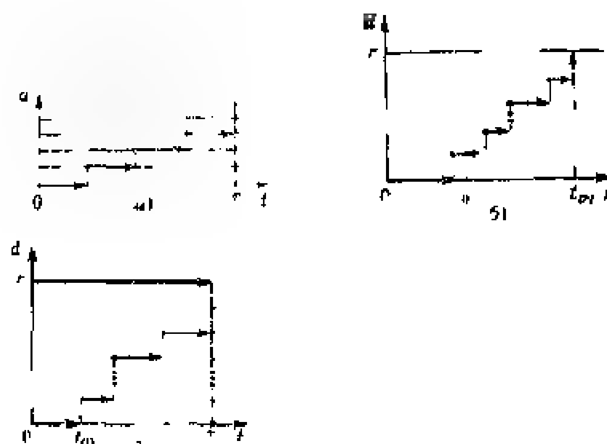


图 4·2

($d=0,1,2,\cdots$)构成的边界，适合[N,Б,T]方案（图4·3а），由虚线(t,r)（$t\geqslant 0$）构成的边界适合于[N,Б,r]方案（图4·3б），由直线线段{(t,r)，$0\leqslant t\leqslant T$}和点(T,d)（$d=0,\cdots,r-1$）构成的边界适合于[N,Б,(r,T)]方案（图4·3,в）。有时，在所采用的


图 4.3

方案中，G的边界由两条线构成：$d(t)=a_0+bt$和$d(t)=a_1+bt$，$a_0<a_1$，$b>0$（图4·4）。下面的直线产生离散的边界点(t_d,d)($d=0,1,2,\cdots$)，对这个离散边界点来说，$d=a_0+bt_d$，上面的直线产生许多线段。这种方案称做**序贯方案**。在曲线(t,$d(t)$)首次达到G的边界的时刻停止试验，这种方案称为**首次出现方案**。在实践中也可采用这样的试验方案，即可以由下次发生故障时刻来决定停止还是继续试验。

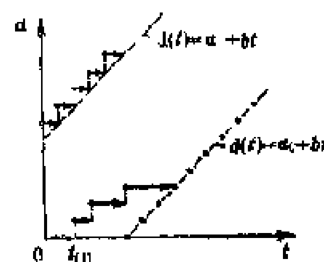


图 4·4

累加和随机检查方案 在新产品进行试验时，对尚未导致发生故障的产品参数变化的研究，引起了人们的兴趣。同时，为了研究方便，可以将一定数量的无故障产品从试验中剔除

进行检查。例如，在预先给定时间$T_1<T_2<\cdots$时，从试验中剔除合格产品数$n_1,n_2,\cdots$。这种预先剔除产品的方案，称为**第一类累加检查方案**。有时，在发生故障时剔除合格的产品更方便，这时在第一次故障时刻$t_{(1)}$剔除n_1个合格产品，在第二次故障时刻$t_{(2)}$剔除n_2个合格产品。这种方案称为第二类累加检查方案。一般用第二类检查方案处理试验数据，比用第一类更简单。但是，同不进行检查的试验方案相比，无论是第一类还是第二类检查都使试验数据的处理复杂化。

在某些情况下，随机检查方案的数学模型是最佳试验方案的数学模型。现在来研究这种方案最简单的例子。假定受试产品是由两个部件串联组成的。设t_{ik}——第i个产品中k型部件的故障时刻，$k=1,2$是部件型号；$i=1,\cdots,N$是产品序号，假定进行无替换试验，在这种情况下，第i个产品在发生故障的时刻$t_i=\min(t_{i1},t_{i2})$之前进行试验。可以认为，什么样的部件故障能导致产品发生故障是已知的。若对产品的每一对部件独立地进行试验，就会得到故障发生时刻t_{i1}和t_{i2}。在所研究的方案中，发生故障的极小瞬间使得其它部件的故障无法被发现（检查）。例如，按$[N,B,T]$方案对这些产品进行试验，将获得一组故障时刻为$0<t_{(1)}<\cdots<t_{(d)}<T$，其中时刻$t_{(1)}$表示$i_1$型部件发生故障，在$t_{(2)}$时，$i_2$型部件发生故障等等，$i_1,i_2,\cdots=1,2$。在图4.5上，小圆圈表示1型部件的故障，×表示2型部件的故障，虚线表示故障发生前无法观察的时间。

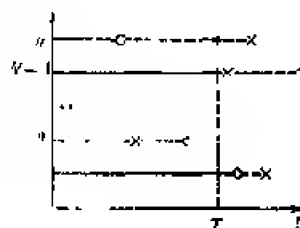


图 4.5

应注意，随机检查方案与上述方案近似。在分析实际工作中产品的故障数据时，这种模型常常出现。这是因为，产品开始工作的时刻（如进入某车场的汽车）可以看作是随机的。

上述试验方案实例表明，各种数学模型均可成为可靠性试验数据处理方法的基础。

可靠性大规模试验　通常，产品可靠性试验集中在专门的试验站或试验单位进行。试验站的工作可以看成是专门的大规模维修系统。这种看法可能出乎意外，但却值得注意。事实上，在使试验过程最优化时，自然要较广泛地提出问题，而不仅是指每一个单独的试验方案的最优化。必须注意到，大规模维修系统的特点：受试产品流水式地进入，严格组织的试验程序、等待维修时间等等。用最简单的形式组织试验时，可以认为由N个产品组成的每批产品按相等时间间隔相继进入试验站。试验设备（试验台）可以看做是“维修工”（在电话学中，这些设备称之为联系排队论与应用的渠道）。假设全部N个产品均可在一个试验台上进行试验，如试验方案是$[N,b,r]$型方案，那么就可以得到按程序试验、正常进入流和k个维修工的大规模维修系统。其中k等于试验台数。若每批样本容量很大，一个试验台无法容纳，那么该批产品的试验应视试验的工作情况分批进行。研究进入流的系统是排队论中最迫切的任务。然而，在利用多台试验台试验时，要进一步考虑试验的具体规则，从而提出排队论的新课题。

关于试验站各种效率特征量的计算问题，以及对不同类型产品实施大规模试验最优化的问题，目前还研究得很不够。

在可靠性理论专著(如参考文献[44,202])中，对各种试验方案都进行了研究。有关可靠性试验结果处理问题的一些提法，在莫斯科综合技术大学工业产品质量检验先进方法和可靠性讨论会论文集中都有介绍（如参考文献[62,90]）。关于排队论的基本概念，可参考[45,69]。

§4·2 无故障工作时间分布函数的基本模型

参数族 产品无故障工作时间分布函数$F(t)$是产品可靠性的主要特征量。根据此特征量，可求出可靠性的其它重要特征量，如平均无故障工作时间，可靠寿命等。若已知系统中部件的分布函数，且各部件故障是相互独立的，就可以计算系统无故障工作概率。如果系统中部件分布函数的信息不充分，则系统可靠性特征量的计算就复杂了。然而，在这种情况下，假如已知产品分布函数属于哪一类，则仍可做出关于系统可靠性的重要结论。在处理可靠性试验结果时，可利用统计方法有根据地缩小可能的分布类。

如果已知分布的某些性质，就可缩小可能的分布类。正如在统计学中所述，这种性质的确定需要验证。

由第一篇知，$\bar{F}(t)=1-F(t)$，$\Lambda(t)=-\ln\bar{F}(t)$ [illegible]**寿命函数**，而其导数$\lambda(t)=\Lambda'(t)$——**故障率函数**。平均无故障工作时间记作m($m=\int_0^{\infty}t\mathrm{d}F(t)$)。方程$F(x_p)=p$的解$x_p$，即水平分位点是分布函数的重要特征。如果许多数能满足这一关系式，则要从中选出最小的数。在§1·2中曾研究了某些分布参数族（指数分布的参数，正态分布参数，两参数威布尔－格涅钦科分布$F(t)=1-\exp\{-(\lambda t)^{\alpha}\}$参数，由概率密度$f(t,\alpha,\beta)=(\beta^{\alpha}t^{\alpha-1}/\Gamma(\alpha))e^{-\beta t}$决定的$\Gamma$分布参数，以及混合分布参数），还可继续列出其它参数族。例如，若认为指数分布的参数λ是服从参数α和β的Γ分布的随机变量，则根据概率公式，得

$$F(t)=\int_0^{\infty}P\{\tau<t|\lambda=x\}f(x,\alpha,\beta)\mathrm{d}x=1-[1+t/\beta]^{-\alpha}. \tag{4.3}$$

分布函数（4.3）式构成帕列托（Парето）分布族。

在计算某些产品（弹簧、轴承等）的可靠性时，可采用位置参数分布函数族。于是，有两参数（尺度参数λ和位置参数μ）分布函数

$$F(t,\lambda,\mu)=\begin{cases}1-\exp\{-\lambda(t-\mu)\}, & t>\mu,\\ 0, & t\leqslant\mu.\end{cases} \tag{4.4}$$

三参数族是威布尔—格涅钦科两参数族的自然推广

$$F(t,\lambda,\mu,\alpha)=\begin{cases}1-\exp\{-[\lambda(t-\mu)]^{\alpha}\}, & t>\mu;\\ 0, & t\leqslant\mu.\end{cases} \tag{4.5}$$

对分布函数（4.4）和（4.5）式来说，位置参数μ可解释为绝对保障的无故障工作时间。

不难看出，在上述两参数族中，有些可用同一方法获得。必须取某一具体函数$F_0(x)$和在$t>0$的条件下，对t非递减函数$x=g(t)$（$F_0(t)$有时称为模型）。按公式引入位置参数δ和尺度参数σ，便获得分布函数为

$$F(t,\delta,\sigma)=F_0((g(t)-\delta)/\sigma). \tag{4.6}$$

例如，若取二重指数分布$F_0(x)=1-\exp(-\exp x)$作为模型，而$g(t)=\ln t$，由（4.6）式得

$$F(t,\delta,\sigma)=1-\exp\left\{-\exp\left(\frac{\ln t-\delta}{\sigma}\right)\right\}=1-\exp\{-(te^{-\delta})^{1/\sigma}\}. \qquad (4.7)$$

若令$\lambda=e^{-\delta}$，而$\rho=1/\sigma$，则分布函数（4.7）与威布尔-格涅钦科两参数族相同。

若$F_0(t)$是标准正态分布

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-y^2/2}dy.$$

并令$g(t)=\ln t$,则由（4.6）式可得到对数正态分布族的分布函数

$$F(t,\delta,\sigma)=\Phi((\ln t-\delta)/\sigma).$$

在数理统计中，常常用正态标准分布（标准分布表已列入教科书）来获得统计结论。χ^2分布和菲舍尔分布就是这种分布的例子。在研究服从标准正态分布（均值为0和方差为1）的相互独立的随机变量$\xi_1,\cdots,\xi_m$的基础上，采用这两个分布最简单。$\xi_1^2+\cdots+\xi_m^2$之和是服从自由度为m的χ^2分布的分布函数。必须指出，若随机变量τ服从参数为λ的指数分布，则$2\lambda\tau$服从两自由度的χ^2分布。若$m=n_1+n_2$，则分数

$$\left[\frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}\xi_i^2\right]\Big/\left[\frac{1}{n_2}\sum_{i=n_1+1}^{n_1+n_2}\xi_i^2\right]$$

的分布函数称为（n_1,n_2）个自由度的菲舍尔分布。

有时可根据具体条件下故障时间的似然函数得出参数族的显式（如§1·2中，指数分布的参数就是这样得出的）。

现在来研究故障发生时间的另一数学模型。在建立故障数学模型时，假设产品的状态，可用与产品工作中累积损伤的大小对应的标量参数（非观察参数）来说明。设$w(t)$——到时刻t为止这一参数的值。自然可以认为$w(t)$是t的非递减函数。假设损伤是以随机形式累积的，并且累积速度$dw(t)/dt=\dot{w}(t)$是平稳随机过程的强度。对于许多平稳随机过程（当然不是所有的）可以认为$w(t)=\int_0^t\dot{w}(s)ds$的均值和方差对$t$是线性的，即$Mw(t)=at$，$M[w(t)-at]^2=bt$，$a>0$，$b>0$。于是，随机变量$[w(t)-at]/\sqrt{bt}$可看作近似服从正态分布。若累积失常达到$w_0$水平时发生故障，则无故障工作时间分布

$$F_*(t)=P\{w(t)>w_0\}\approx1-\Phi\left(\frac{w_0-at}{\sqrt{bt}}\right). \qquad (4.8)$$

以上关于损伤累积性质的假设，使得对函数研究具有合理性

$$F(t)=\Phi(\alpha\sqrt{t}-\beta/\sqrt{t}),\ \alpha>0,\ \beta>0. \qquad (4.9)$$

若考虑到恒等式$1-\Phi(x)=\Phi(-x)$，并令$\alpha=a/\sqrt{b}$，$\beta=w_0/\sqrt{b}$，则由(4.8)式很容易得出（4.9）式。

在处理产品可靠性数据时，广泛地应用参数族。采用分布函数参数族的基本思想：在选择了相应的分布族$\mathcal{F}=\{F(\cdot,\theta)\}$之后，可以挑选参数值$\theta$，即在此参数值时，$F(t,\theta)$非常近似于未知量$F(t)$。必须永远牢记，在利用分布参数族时，最多只能确定未知分布$F(t)$比较精确的近似值。

在求无故障工作时间未知分布近似值时，应对所采用的分布族进一步研究。

离散分布 在可靠性理论中，也可用离散分布。例如，假设用$[N, B, T]$方案进行试验，且没有故障时刻记录。由试验结果知，每一产品到时刻T或是无故障的，或者是有故障的。而各产品的故障可看作是相互独立的。在试验时间T内发生故障的产品总数$d(T)$服从**二项分布**，其概率等于

$$P\{d(T)=d\}=b_N^d(p)=\binom{N}{d}p^d(1-p)^{N-d}, d=0,1,\cdots,N. \quad (4.10)$$

式中$\binom{N}{d}=N!/(d!(N-d)!)$——$N$中取$d$的组合数，而$p=F(T)$——在时间$T$内产品的故障概率。二项分布函数为

$$B_N^k(p)=\sum_{d=0}^{k}b_N^d(p), \quad k=0,\cdots,N. \quad (4.11)$$

式中$B_N^k(p)$——参数为N和p的二项分布。

现在来研究下面一个问题。库中贮存N个产品。在贮存期间，其中有些产品可能发生故障。设库中有N个产品，其中有D个发生了故障，则在n个中有d个故障的概率是多少？在N个产品中随机地抽取n个的可能数是$\binom{N}{n}$，n个中有d个故障的可能数是$\binom{n}{d}$。若抽样是随机的，则其中d个故障的概率由下式决定

$$h_{N,D}^{n,d}=\binom{n}{d}\binom{N-n}{D-d}\Big/\binom{N}{D}=\binom{D}{d}\binom{N-D}{n-d}\Big/\binom{N}{n}. \quad (4.12)$$

公式（4.12）给出了$d=0,1,\cdots,n$的概率是离散分布，称作**超几何分布**。在随机抽样时，在n个产品中发生故障的产品数不大于a的概率为

$$H_{N,D}^{n,a}=\sum_{k=0}^{a}h_{N,D}^{n,k}, \quad a=0,\cdots,n. \quad (4.13)$$

超几何分布是参数为n，$N=1,2,\cdots$；d，$D=0,1,\cdots$；$a\leqslant\max(n,D)\leqslant N$的三参数分布。这种分布广泛应用于解决工业产品质量的统计检验问题。

当然，在可靠性理论问题方面，最常用的离散分布是泊松分布（见第一章）。应当注意随机变量ξ服从均值为a的泊松分布$P\{\xi=k\}=a^ke^{-a}/k!$，其可能值是整数$k=0,1,2,\cdots$。泊松分布是单参数分布。记作

$$I_d(x)=\sum_{k=0}^{d}\frac{x^k}{k!}e^{-x}. \quad (4.14)$$

非参数分布族 以上所研究的所有分布函数族的特点是：每个函数都是由给定的有限个参数（如一个，两个或三个）所决定的。通常，这些分布族只用于估计未知分布$F(t)$的近似值。这样，就产生了根据假设的定性特征来分辨分布函数属于哪一类的问题。在可靠性数学理论中，已获得了有价值的结果。分辨出的这种分布就叫非参数分布，亦即，利用有限个参数不能完全确定分布函数属于哪一个。

在§1.4中曾研究了各类老化分布函数。S_0类的特点是，在时刻t无故障的条件下，在$[t, t+x]$区间的无故障条件概率对t是非递增的。利用寿命函数$\Lambda(t)$，可将此条件概率写成：

$$P\{\xi_t\geqslant x\}=\bar{F}(t+x)/\bar{F}(t)=\exp\{-[\Lambda(t+x)-\Lambda(t)]\}. \quad (4.15)$$

由（4.15）式可得出结论：[illegible]

障工作时间τ才服从S_0类的分布函数。若分布函数$F(t)$是S_0类的，则对于任意值t_1和$t_2=t_1+x$，$x\geqslant 0$，不等式

$$\Lambda(t_1+x/2)-\Lambda(t_1)\leqslant\Lambda(t_2)-\Lambda(t_1+x/2)$$

及其等价不等式

$$\Lambda\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right)=\Lambda\left(t_1+\frac{x}{2}\right)\leqslant\frac{1}{2}[\Lambda(t_1)+\Lambda(t_2)]$$

是正确的。

因而，S_0类老化分布类的寿命分布函数是下凸函数。反之，也不难证明：非负非递减下凸函数$\Lambda(t)$服从S_0类老化分布函数。老化函数$F(t)$不可能有一个以上的跳跃值，同时也不能在跳跃值$F(t)=1$的右边。在$F(t)<1$时对变量t来说，存在密度$f(t)$。

S_0^*类均值老化分布函数是较普遍存在的，其比值$\Lambda(t)/t$对t是非递减函数。对于指数分布，此比值是$\Lambda(t)/t=\lambda$，即与t无关。S_0^*类分布函数可按其寿命函数用下列方法作图（图4·6a)）。在平面(t,Λ)上，从原点(0,0)引出正斜率的直线束，寿命函数或者由下而上与直线束相交，或者与这些直线重合。此类分布的主要特性之一如下：假设由不可靠部件组成的系统为单调关联系统，并且所有部件都是必要的（见§3·1）。众所周知，单调关联系统的例子有：

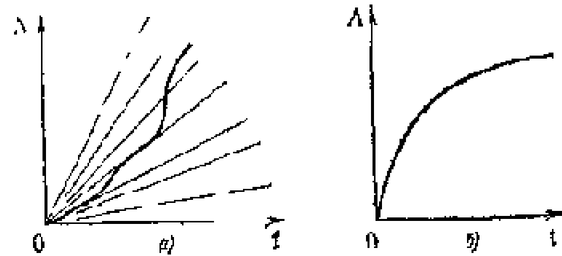


图 4.6

串联、并联、并—串联、串—并联系统。这样，若系统中所有部件的分布是均值老化分布，则此系统的分布函数是均值老化函数。换言之，S_0^*类函数对单调关联系统的函数形式是不变的。

在§1·4中曾引用了比较广泛的S_1、S_2和S_3类老化分布函数。可以表明，S_0^*类分布有以下包含关系$S_3\subset S_0^*\subset S_1$。正如§1·4中指出的，$S_1$类函数如同$S_0^*$类函数一样，具有一系列优良特性。再补充一点，即$S_1$类与$S_0^*$类一样，对单调关联系统的函数形式都是不变的。两个相互独立的S_1类分布随机变量之和，服从S_1类分布。

由于早期故障的“耗损”现象，采用某种意义上具有相反特性的各分布类，就更加合理。若要求剩余寿命τ_t分布函数对t非递增，则将获得所谓**非老化**分布函数类M_0。不难证明，非老化分布是上凸寿命函数（图4·6b)）。对t非递增，可分离出更广泛的均值非老化分布类M_0^*。在任意$t\geqslant 0$，$x\geqslant 0$时，要求满足不等式$\overline{F}(t+x)\geqslant\overline{F}(t)\overline{F}(x)$，还可分离出更广泛的分布类$M_1$。这一分布在开始的区间$(0,x)$具有的故障概率，大于在时刻$t$前无故障条件下在区间$(t,t+x)$出现故障的条件概率。

从引用的威布尔—格涅钦科分布、Γ分布族来看，它们具有参数$\alpha<1$和$\alpha<1$的非老化分布。M_0类的非老化分布函数是故障率非递增的函数，在帕列托分布的情况下，此函数为对t递减函数。因而，帕列托分布也是非老化分布，并属于M_0类。其实，这一结论是在混合分布中，有非老化分布类的一般不变性得出的

以上研究了一维随机变量的分布族。在系统中各部件的故障是独立时，则系统的可靠性

特征量可根据部件无故障工作时间的一维分布函数来计算。但是，也可能有这样的情况，即在系统中由m个部件组成的某一子系统，它们发生故障是由于共同原因造成的。在这种情况下，这些产品的无故障工作时间$(\tau_1,\cdots,\tau_m)$应看作是随机向量，其分量是相依随机变量。此向量$\mathbf{t}=(t_1,\cdots,t_m)$的函数的概率

$$P\{\tau_1\leqslant t_1,\cdots,\tau_m\leqslant t_m\}=F(\mathbf{t})$$

称为随机变量$\tau_1,\cdots,\tau_m$的联合分布函数。同在一维情况下一样，寿命函数$\Lambda(\mathbf{t})=-\ln\overline{F}(\mathbf{t})$，$\overline{F}(\mathbf{t})=1-F(\mathbf{t})$。

故障率向量$\mathbf{h}(\mathbf{t})$ 可作为寿命函数的导数，即

$$\mathbf{h}(\mathbf{t})=(h_1(\mathbf{t}),\cdots,h_m(\mathbf{t}))=(\partial\Lambda(\mathbf{t})/\partial t_1,\cdots,\partial\Lambda(\mathbf{t})/\partial t_m)\ .$$

有各种方法将指数分布族推广到多维情况，马尔萨勒（Маршал）和阿勒钦（Олкин）所采用的方法就是其中之一。当$n=2$时，此分布由概率

$$P\{\tau_1\geqslant t_1,\tau_2\geqslant t_2\}=\exp\{-\lambda_1 t_1-\lambda_2 t_2-\lambda_{1,2}\max(t_1,t_2)\}$$

决定，即分布是三参数分布。对于由两个不同部件组成的串联系统来说，可很容易地解释此分布。除了能引起产品部件分别发生故障的独立原因外，还有能引起它们同时发生故障的共同原因。

最后应指出，在研究分布函数族的特性时，可利用参考文献。参考文献[68]专门阐述分布。在参考文献[44,202]中，对用于可靠性理论的许多分布族都作了详尽地论述。参考文献[26,98]列出了用于数学统计的分布函数表。关于分布的各种解析式，在参考文献[132]中有详细说明。参考文献[49,190]，专门论述极值分布（威布尔—格涅钦科分布，二重指数分布）。在参考文献[15]中，研究了超几何分布在质量统计检验问题中的各种应用。在由巴罗—普罗尚、马尔萨勒所著的一系列丛书[157—160,203]中，对非参数分布类作了研究，其中还引用了其他一些著作。在参考文献[212]中，对分布族如何扩展为多维情况作了概述。最后，在参考文献[175]中，给出了含单调故障率的两维函数的重要不等式。

§4·3 统计推断的基本概念和方法

统计假设检验 本节将阐述统计学基本概念及其在可靠性理论中的某些应用。因为假设产品（部件或系统）可靠性数据是随机变量，所以可用概率分布来描述之。这个未知分布称作**生成分布**。当应用于可靠性试验结果进行分析时，这就是说，存在可观察的随机故障时刻与之相应的无故障工作时间的生成分布函数$F(t)$。数理统计的任务，就是拟定获得生成概率分布特性，及其数字特征（矩、分位点等）的方法。这里仅研究数理统计学的基本方法：统计假设检验、点估计和区间估计。

检验生成分布是根据数据$\mathbf{x}$检验某一假设的分布。通常，数据是一组故障时间，或是一组故障数。必须根据数据$\mathbf{x}$来判断其服从哪一种典型分布。方法之一就是假设检验。

定义1 关于可靠性数据生成分布服从某一给定分布的假设，叫做**统计假设**。

以下简要地介绍统计假设。现在，研究假设实例。设$\mathbf{x}_1$和$\mathbf{x}_2$——按Π_1和Π_2方案对两批同型号产品进行可靠性试验时获得的数据，而$F_1(t)$和$F_2(t)$——分别为无故障工作时间的分

布函数 假设两批产品无故障工作时间分布函数相同，即$F(t)=F_2(t)$。

生成分布函数$F(t)$属于给定族，乃是可靠性理论的典型假设。假设可以是在某一$\lambda>0$时，$F(t)=1-e^{-\lambda t}$，亦即$F(t)$属于指数分布族。这时，暂不提λ应是怎样的值，重要的是检验$F(t)$是否服从威布尔一格涅钦科三参数分布族（4.5）的假设。若假设生成函数$F(t)$族具有参数族F，即$F(t)=F(t,\theta)$，其中θ——未知参数，$\theta\in\Theta$，则集Θ中的子集与假设是一致的。例如，假设H_0的内容可以是生成分布参数θ属于$\Theta_0\subset\Theta$。若θ值符合生成函数，则事件A的概率可记作$P\{A\}$，数学期望值记作M_θ。

设生成分布函数服从三参数威布尔一格涅钦科分布族。这样，关于$\mu=0$（即没有绝对有保障的无故障工作时间）的假设H_0检验，就显得很重要。子集$\Theta_0=\{(\mu,\rho,\lambda):\mu=0,\rho>0,\lambda>0\}$符合这一假设$H_0$。

如果只有一个分布函数符合假设，则此假设称之为**简单假设**；反之，称之为**复合假设**。在可靠性理论中，常常见到复合假设检验。在以上所有实例中，假设均为复合假设。

通常（但并非总是），在假设检验时，要研究两种假设：基本假设（或原假设）和竞争假设（或备择假设）。在获得数据之前认为比较真实的假设，称作基本假设，记作H_0。而竞争假设记作H_1。$F\in H_1$表示生成函数$F(t)$属于假设H_1。

为检验可靠性数据是符合某假设H_0，还是假设H_1，而拟定了统计准则。

定义2 根据一组规则来判断数据x是符合基本假设H_0而接受，还是不符合假设H_0而拒绝，称这一组规则为**检验准则**。

当检验两个假设时，若拒绝原假设H_0，则接受竞争假设H_1。若接受假设H_1，则说明数据x符合假设H_1；若拒绝假设H_1，则说明数据x不符合假设H_1。

从全部数据x可能值的空间Ю中抽出样本X_1，决定了所谓**非随机性准则**的类是广泛的。这时，若数据$x\in X_1$，则拒绝假设H_0，而接受假设H_1；若$x\notin X_1$，则接受H_0，而拒绝H_1，称样本X_1为临界子集。当准则是广泛类时，可依某一概率拒绝H_0，称此类准则为随机性准则。在一般情况下，准则取决于给定的函数$\varphi(x)$，此函数等于根据数据x拒绝假设H_0的概率，称函数$\varphi(x)$为临界函数。对于非随机性准则，函数$\varphi(x)$只能等于零（接受假设H_0）或等于1（拒绝假设H_0）。

通常，用适当的方法选择统计量进行假设检验。

定义3 设x是一个样本，$T=T(x)$是样本函数，且与生成分布的未知参数无关，则称$T=T(x)$是一个**统计量**。

若在统计量取值的集合中抽出样本Ю$_1$，即当$T(x)\in$Ю$_1$时，则拒绝假设H_0；当$T(x)\notin$Ю$_1$时，而接受假设H_0，则称统计量$T=T(x)$为**检验统计量**。

设生成函数为$F(t)$，用$\beta(F)$表示拒绝假设H_0的概率。如果是研究参数族和$F(t)=F(t,\theta)$，则用$\beta(\theta)$来表示此概率更方便。

定义4 以F（或θ）作为自变量，则称概率$\beta(F)$（或参数族$\{F=F(t,\theta)\}$的$\beta(\theta)$）为**准则的功效函数**。

若$F\in H_0$，则$\beta(F)$是错误地拒绝假设H_0的概率；若$F\notin H_0$，且假设H_0是错误的，则$1-\beta(F)$是错误地接受假设H_0的概率。

定义5 对$F\in H_0$来说，称$\beta(F)$为犯**第一类错误概率**；而对$F\notin H_0$来说，称$1-\beta(F)$为犯

二类错误概率。犯第一类错误概率的最大值（上界）

$$\alpha = \sup_{F \in H} \beta(F) \tag{4.16}$$

称作准则的水平。

在水平相同的两个准则中，当所有$F \in H_0$时，那个小于犯第二类错误概率的准则，称作一致性最大功效准则。在数理统计中，总是试图从缩小的准则类中，选出最大的功效准则。然而，只有少数数学模型才具有一致性最大功效准则（PHM准则）。

已知诺伊曼-皮尔逊定理由下列条件构成，令假设H_0和H_1是简单假设，$p_0(x)$和$p_1(x)$分别表示数据x的概率密度（或概率）。当假设H_0正确时，事件$\{p_1(x)/p_0(x) > 0\}$的概率不小于α。这样，犯第一类错误概率等于α，其最大功效准则符合下列规则：若$p_1(x)/p_0(x) > K_\alpha$，则拒绝假设H_0；若$p_1(x)/p_0(x) = K_\alpha$，则应依概率γ_α接收。用第一类错误概率与给定的α可很容易地解出K_α和γ_α。

定义6 对于某一准则，若错误地拒绝正确假设H_0的概率不大于正确拒绝错误假设H_0的概率，亦即

$$\alpha_0 = \sup_{F \in H_0} \beta(F) \leqslant \inf_{F \in H_0} \beta(F), \tag{4.17}$$

则这一准则称为**无偏性准则。**

对无偏性（4.17）式的要求，常常是对无偏性的自然约束，在利用假设检验准则时，要求必须满足这一约束。

在某些不同$F(t)$的问题中，为确立偏序关系$F_1(t) < F_2(t)$，可使$F_1(t)$比$F_2(t)$“远离”构成假设H_0的分布函数。在这种情形下，自然要求对于所利用的准则的功效函数是关于此序的非递增函数，亦即，对于$F_1(t) < F_2(t)$，$\beta(F_1) \geqslant \beta(F_2)$。下面举例说明之。

一般研究缩小此类准则的主要方法，与不变性有关。这一方法，在检验用模型获得的二参数分布族时，已举例说明了。令假设H_i：无故障工作时间的分布为$F_i((g(t)-\mu)/\sigma)$，其中$i=0,1$；$F_0(x)$和$F_1(x)$——两个具体函数；而$g(t)$——严格递增函数，$t>0$；$-\infty<\mu<\infty$；$\sigma>0$。现在来研究射线的变换

$$t' = g^{-1}(bg(t)+a). \tag{4.18}$$

式中g^{-1}——g的反函数，$-\infty<a<\infty$，$b>0$。若产品故障时间τ是服从分布为$F(t)=F_i((g(t)-\mu)/\sigma)$的随机变量，则随机变量$\tau'=g^{-1}(bg(\tau)+a)$的分布为

$$P\{\tau' \leqslant t\} = P\{bg(\tau)+a \leqslant g(t)\} = P\left\{\tau \leqslant g^{-1}\left(\frac{g(t)-a}{b}\right)\right\}$$

$$= F_i\left(\frac{g\left(g^{-1}\left(\frac{g(t)-a}{b}\right)\right)-\mu}{\sigma}\right) = F_i\left(\frac{\frac{g(t)-a}{b}-\mu}{\sigma}\right)$$

$$= F_i\left(\frac{g(t)-(b\mu+a)}{b\sigma}\right).$$

这样一来，（4.18）式的变换只改变分布参数，而不改变分布模型，因此其假设H_0和H_1也不变。具体地说，若τ服从参数为μ和σ的分布$F(t) \in H_i$，则$\tau'=g^{-1}(bg(\tau)+a)$同样也服从分布$F'(t) \in H_i$，$i=0,1$；但其参数为$\mu'=b\mu+a$和$\sigma'=b\sigma$。当然，必须使准则与

时间具体变换方法无关，亦即对（4.18）式的变换是不变的。假设试验数据$(t_{(1)},\cdots,t_{(r)})$是根据[N,Б,r]方案获得的，其中$t_{(i)}$——第i次故障时刻，而$r\geqslant 3$。不难检验，统计量

$$\left\{\frac{g(t_{(2)})-g(t_{(1)})}{g(t_{(r)})-g(t_{(1)})},\frac{g(t_{(3)})-g(t_{(1)})}{g(t_{(r)})-g(t_{(1)})},\cdots,\frac{g(t_{(r-1)})-g(t_{(1)})}{g(t_{(r)})-g(t_{(1)})}\right\} \quad (4.19)$$

与时间变换方法无关，亦即，统计量对（4.18）式的变换是不变的。于是，随机变量的概率分布（4.19）式仅取决于所采用的模型$F_0(x)$或$F_1(x)$，这样一来，不变性要求（或称不变性原理）可把两个复杂假设H_0和H_1的检验，简化为两个简单假设的检验：（4.19）式的数据符合所选择的模型$F_0(x)$或$F_1(x)$ 由于（4.19）式中向量的分量是相依的，所以解决这一问题要比计算更困难。由于（4.19）式中的统计量的分布同μ和σ的大小无关，仅取决于选择的模型，所以，可以认为，若假设H_i（$i=0,1$）是正确的，则无故障工作时间分布等于$F_i(g(t))$。假设$F_i(x)$有密度$f_i(x)$，则

$$\frac{g(t_{(k+1)})-g(t_{(1)})}{g(t_{(r)})-g(t_{(1)})}=y_k, \quad k=1,\cdots,r-2;$$

$$p_i(\mathbf{y})=\binom{N}{r}\iint_{u<v}f_i(u)f_i(v)(v-u)^{r-2}[F_i(v)]^{N-r}$$

$$\times\prod_{k=1}^{r-2}f_i(y_k(v-u)+u)\,du\,dv \quad (4.20)$$

便是概率密度，式中$\mathbf{y}=(y_1,\cdots,y_{r-2})$，$0<y_1<\cdots<y_{r-2}<1$，$i=0,1$。

由于把任务简化为对两种简单假设的检验，所以根据若伊曼—皮尔逊定理，水平α的最大功效准则为

$$\begin{aligned}&若p_1(\mathbf{y})/p_0(\mathbf{y})>K_\alpha，则拒绝H_0；\\&若p_1(\mathbf{y})/p_0(\mathbf{y})<K_\alpha，则接受H_0。\end{aligned} \quad (4.21)$$

对于大多数模型，在试验前已确定了某一α时，事件$p_1(\mathbf{y})/p_0(\mathbf{y})=\alpha$的概率为零。所以往往没有必要选择诺伊曼—皮尔逊定理中指出的r_α，而用（4.21）式可以完全确定检验假设H_0和H_1的最大功效不变性准则。

根据统计模拟估计K_α很简单，对于按[N,Б,r]方案进行i次模拟试验，应首先求出分布为$F_0(g(t))$的相互独立随机变量$x_{i,1},\cdots,x_{i,N}$的N值。然后，由这些值中抽出最小值$x_{i,(1)}\leqslant\cdots\leqslant x_{i,(r)}$的$r$个值，并计算构成向量$\mathbf{y}_i=(y_{i,1},\cdots,y_{i,r-2})$的分量$y_{i,k}=(x_{i,(k+1)}-x_{i,(1)})/(x_{i,(r)}-x_{i,(1)})$，$k=1,\cdots,r-2$ 将$\mathbf{y}_i$代入（4.20）式，便可求出比值$p_1(\mathbf{y}_i)/p_0(\mathbf{y}_i)=K_i$。假设用此方法进行$M$次运算便求出$M$个比值$K_1,\cdots,K_i,\cdots,K_M$，并依大小排成顺序序列$K_{(1)}\leqslant K_{(2)}\leqslant\cdots\leqslant K_{(M)}$。令$K_\alpha=K_{(M_\alpha)}$，亦即令$K_\alpha$等于$K_1,\cdots,K_M$中的第$[M_\alpha]$个比值，便可求出$K_\alpha$的近似值。这里$[\alpha]$——$\alpha\cdot M_\alpha$的整数部分。

必须注意，常常用统计模拟法分析可靠性数据问题。

再来讨论不变性一般原理，现在来研究数据空间Ы的变换群$G=\{g\}$，亦即对于任意$\mathbf{x}\in$Ы和$g\in G$，$g\mathbf{x}\in$Ы。在属于空间Ы的随机变量ξ中，$g\in G$变换产生同样属于空间Ы的新的随机变量$g\xi$。若$\xi=\mathbf{x}$，则令$g\xi=g\mathbf{x}$。如果关系式$f(\mathbf{x}_1)=f(\mathbf{x}_2)$等效于某些$g\in G$时的$\mathbf{x}_1=g\mathbf{x}_2$，则称统计量$f(\mathbf{x})$为**最大不变量**。在上例中，统计量（4.19）式就是最大不变量。如果对于任意随机变量ξ服从假设H的分布，在任意$g\in G$时，随机变量$g\xi$也应服从假设H的分布，则

称假设H为对变换群G的**不变性假设**

检验假设H_0、H 的**不变性一般原理**如下：假设G——数据空间Ы（最大）变换群，对于此群，假设H_0和H_1是不变的，这样，必须根据一个最大不变数来构成检验这些假设的准则。

假设生成分布属于参数族 $\mathcal{F}=\{F(t,\theta),\theta\in\Theta\}$，而$f(x,\theta)$——数据$x\in$Ы 的概率密度（或概率）。当$x$给定时，把$f(x,\theta)$ 作为所有可能值$\theta\in\Theta$的函数。此函数可记作$L(\theta,x)$。称函数$L(\theta,x)$ 为**似然函数**。而根据似然函数的最大值确定的θ值称为**θ的似然估计**。由于把似然函数看作是参数Θ的所有可能值的函数，所以似然函数与生成分布的未知参数值无关。因此，似然函数是统计量，一般情况下（但并非总是！），用

$$\sup_{\theta\in H}L(\theta,x)/\sup_{\theta\in J}L(\theta,x) \tag{4.22}$$

作为检验统计量可获得较好的准则，而有时甚至是一致最大功效准则。以统计量（4.22）式为基础的准则，称作**似然关系准则**。

如果进行大量的可靠性试验，并获得了大量的故障数据，则选择该准则能得到很好的渐近性。

为便于理解，现在来研究当$n\to\infty$时的试验方案序列$\Pi_n=[N_n,Б,r_n]$(或$\Pi'_n=[N_n,Б,T_n]$)，$N_n\to\infty$，$r_n\to\infty(T_n\to\infty)$。还要研究受试产品无故障工作时间分布函数为$F(t)\in H_0$的假设检验问题，此外，还要根据方案$\Pi_n$(或$\Pi'_n$)的试验数据，研究假设$H_0$检验的准则序列$\{T_{n,\alpha}\}$。设准则$T_{n,\alpha}$水平不超过$\alpha$。

定义7 如果数据的任意生成分布函数$F(t)\notin H_0$时，错误地接受H_0的概率符合序列$\{T_{n,\alpha}\}$内准则，并当$n\to\infty$时趋于零，则此序列$\{T_{n,\alpha}\}$的准则称作**一致性准则**。

若有大量的可靠性试验数据，就要在其区别近似假设的能力方面对准则进行比较。

设分布是分布参数族，即$F(t)=F(t,\theta),\theta\in\Theta$。而实际上准则是在检验统计量$T(x)$基础上构成的，此统计量的分布近似于正态分布，即

$$P_\theta\{T_\theta(x)<t\}\sim\Phi(t)\ .$$

式中P_θ表示：$F(t,\ \theta)$；$T_\theta(x)=[T(x)-\mu(\theta)]/\sigma(\theta)$——数据的标准正态随机变量函数；$\mu(\theta)$——$T(x)$的数学期望值；而$\sigma^2(\theta)$——$T(x)$的方差。当满足不等式$T(x)>C_\alpha$时，拒绝假设 $\theta=\theta_0$。式中$C_\alpha=\sigma(\theta_0)u_{1-\alpha}+\mu(\theta_0)$($u_{1-\alpha}$——正态分布水平分位点，即$\Phi(u_p)=p,p=1-\alpha$)。在这种$C_\alpha$时，犯第一类错误的概率等于（近似等于）$\alpha$。现在来研究简单竞争假设$\theta=\theta_1(\theta_1\neq\theta_0)$。若

$$\left[u_{1-\alpha}-\frac{\mu(\theta_1)-\mu(\theta_0)}{\sigma(\theta_0)}\right]\frac{\sigma(\theta_0)}{\sigma(\theta_1)}\leqslant u_\beta . \tag{4.23}$$

则在渐近正态分布的条件下得到：错误地接受假设$\theta=\theta_0$的概率不大于β。事实上，在这种情形下

$$P_{\theta_1}\{T(x)<C_\alpha\}\leqslant P_{\theta_1}\{T_{\theta_1}(x)<u_\beta\}\approx\beta .$$

（4.23）式可以改写为：

$$[\mu(\theta_1)-\mu(\theta_0)+u_\beta[\sigma(\theta_1)-\sigma(\theta_0)]]/\sigma(\theta_0)\geqslant u_{1-\alpha}-u_\beta . \tag{4.24}$$

检验统计量能很好地区别近似θ_0的参数值θ，其均值之差$\mu(\theta)-\mu(\theta_0)$应远远大于其标准

方差之差 $\mu(\theta_1)-\mu(\theta_0)$。对于(4.24)式的统计量，可获得近似关系式

$$[\mu(\theta_1)-\mu(\theta_0)]/\sigma(\theta_0)\geqslant u_{1-\alpha}-u_{\beta}. \tag{4.25}$$

在给定 β 时，由此关系式可求出最近似 θ_0 的值 θ_1，从此值开始，将以不小于 $1-\beta$ 的概率接受假设 $\theta=\theta_1$。假定 $\mu(\theta)$——可微分函数，于是，$\mu(\theta_1)-\mu(\theta_0)\approx\mu'(\theta_0)(\theta_1-\theta_0)$。应当看到，$\mu'(\theta_0)$ 应理解为从 θ_0 到 θ_1 的方向导数。这种看法对多维参数 θ，来说是极重要的。现在用下式代替(4.25)式

$$\mu'(\theta_0)(\theta_1-\theta_0)/\sigma(\theta_0)\geqslant u_{1-\alpha}-u_{\beta}. \tag{4.26}$$

由(4.26)式可得出结论：比值 $\mu'(\theta_0)/\sigma(\theta_0)$ 越大（据此可以比较准则），就越能更好地区别近似假设。

设 $T_1(x)$ 和 $T_2(x)$——两个检验统计量，其均值和方差分别等于 $\mu_1(\theta)$，$\sigma_1^2(\theta)$ 和 $\mu_2(\theta)$，$\sigma_2^2(\theta)$。

定义 8

$$e_{F_0,F_1}(T_1,T_2)=[\mu_1'(\theta_0)/\mu_2'(\theta_0)]^2[\sigma_2^2(\theta_0)/\sigma_1^2(\theta_0)].$$

（式中 $\mu_i'(\theta_0)$——由 θ_0 至 θ_1 $\mu_i(\theta)(i=1,2)$ 的方向导数），称为沿 $F_0(t)=F(t,\theta_0)$ 到 $F_1(t)=F(t,\theta_1)$ 方向的 θ_1 检验统计量 T_1 准则对检验统计量 T_2 的**皮特曼渐近有效性准则。**

在可靠性数学理论中拟定了以下假设检验准则：$H(S_0)$——分布函数 $F(t)$ 是老化函数；$H(S_0^*)$——$F(t)$ 是均值老化函数；$H(S_1)$——$F(t)$ 属于 S_1 类（见§2.4）。指数分布族(4.1)（$\mu=0$）式作为原假设 H_0。

若 $F_1\subset H_0$，即 $F_0(t)=1-e^{-\lambda t}$，而 $F_1(t)\in H(S_0^*)$，则

$$\frac{F_0^{-1}F_1(t)}{t}=\frac{1}{\lambda}\frac{A_1(t)}{t}$$

t 的非递减函数。而 $A_1(t)=\ln(1/\bar F_1(t))$——寿命函数。若 $F_1^{-1}F_2(t)/t$ 是 t 的非递减函数，则引入序关系 $F_2\underset{*}{<}F_1$（F_2 在 F_1“左边”）。在这一序关系中，S_0^* 类的所有分布都在指数分布族“左边”。现在仅研究具有密度的分布。不难证明，由 $F_2\underset{*}{<}F_0$ 和 $F_1\underset{*}{<}F_0$ 可得出 $F_2\underset{*}{<}F_0$。由此可见，关系式 $x=F_2^{-1}F_1(y)$ 建立了 x 和 y 间的对应关系，并且较大的 y 对应着较大的 x。这些都说明，$F_2^{-1}F_1(y)/y=x/(F_1^{-1}F_2(x))$ 是 y 的非递增函数，因为 $F_2\underset{*}{<}F_1$。同样，可得到

$$\frac{F_0^{-1}F_2(x)}{x}=\frac{F_0^{-1}F_2\{F_2^{-1}F_1(y)\}}{F_2^{-1}F_1(y)}=\frac{F_0^{-1}F_1(y)}{y}\left[\frac{F_2^{-1}F_1(y)}{y}\right]$$

是 y 的非递减函数，即由 $F_2\underset{*}{<}F_0$ 给出的 x 的非递减函数。这样一来，$F_2(t)$ 不仅在 $F_1(t)$ 的“左边”，而且比 $F_1(t)$ 离 $F_0(t)$ 更“远”些。因此，自然要求出功效函数 $\beta(F)$ 准则。即，在 $F\in H_0$ 时拒绝假设的概率，是引入顺序关系中的非递减概率。亦即，若 $F_2\underset{*}{<}F_1\underset{*}{<}F_0$，则 $\beta(F_2)\geqslant\beta(F_1)$。

对于 $[N,B,N]$ 试验方案，当已知所有故障时间 $t_{(1)}<\cdots<t_{(N)}$ 时，具有以下特性

1）$T(ct_{(1)},\cdots,ct_{(N)})=T(t_{(1)},\cdots,t_{(N)})$；

2）对于所有 $i=1,\cdots,N-1$，

$$\sum_{i=1}^{N} t_{(i)} \frac{\partial T(t_{(1)}, \cdots, t_{(N)})}{\partial t_{(i)}} \geqslant 0$$

的检验统计量$T(t_{(1)}, \cdots, t_{(N)})$，可给出功效函数在序关系$\leq$中是非递减函数的准则。例如，统计量

$$T = \frac{1}{N(\bar{t})^2} \sum_{i=1}^{N} (t_i - \bar{t})^2, \quad \bar{t} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} t_i \tag{4.27}$$

就具有上述特性。当$N \to \infty$时，此统计量趋于方差系数

$$v = \sqrt{M\tau^2 - (M\tau)^2}/M\tau \tag{4.28}$$

的平方，式中$M\tau^2-(M\tau)^2$——无故障工作时间的方差；$M\tau = \int_0^{\infty} t dF(t)$——平均无故障工作时间。应注意，$S_1^*$和$S_0$类中的方差系数（4.28）大于1。

按[N,Б,N]方案试验时，为了比较检验假设H_0与假设$H(S_0)$，可利用巴罗——普罗尚统计量

$$T_{Бп} = [S(t_{(1)}) + \cdots + S(t_{(N)})]/S(t_{(N)}), \tag{4.29}$$

式中$S(t_{(k)})$——第k次故障时刻前的总工作时间。

现在来研究相邻故障之间的区间内总工作时间$S_k = S(t_{(k-1)}, t_{(k)})$, $k=1,\cdots,N$；$t_0=0$；$S(0,t_{(1)})=S(t_{(1)})$。按总工作时间的大小进行排列，可得到顺序序列$S_{(1)} < S_{(2)} < \cdots < S_{(N)}$。该序列中变量$S_k$的序号称作变量$r_k$的秩，即$S_{(r_k)} = S_k$。为比较检验假设$H_0$与$H(S_0)$，也可利用比克耳——达克萨姆（Бикклл Даксам）公式

$$T_{БД} = \sum_{i=1}^{N} i\ln[1 - r_i/(N+1)]. \tag{4.30}$$

对于近似于指数分布$F_0(t)$的任意分布$F(t) \in S_0$，皮特缅渐近有效性$e_{F_0,F}(T_{Бп}, T_{БД}) = 1$。

为了比较检验假设H_0与假设$H(S_1)$，可利用霍尔兰杰尔—普罗尚检验统计量$T_{хп}$。其检验方法如下：首先将所有数据每三个分为一组$(t_{(i)}, t_{(j)}, t_{(k)})$，$i<j<k$，组数为$N(N-1)(N-2)/6$。统计量$T_{хп}$等于有$t_{(k)} > t_{(i)}+t_{(j)}$的三元小组数。对于许多（但不是全部）$S_1$类条件，根据皮特缅渐近有效性计算表明，$T_{хп}$是完全满意的统计量。

满足（4.29）、（4.30）式和统计量$T_{хп}$的准则是无偏准则。当$T_{Бп} > C_\alpha$，$T_{хп} < C_\alpha'$时，拒绝假设H_0，接受假设$H(S_0)$，$H(S_1)$的临界值C_α和C_α'，可根据统计模拟法获得。为此，要找出[N,Б,N]方案结果的分布为$F(t) = 1 - e^{-t}$的i次实现。根据这一结果计算$T_{Бп\,i}$和$T_{хп\,i}$，建立顺序序列

$$T_{Бп(1)} < T_{Бп(2)} < \cdots < T_{Бп(M)}, \quad T_{хп(1)} < T_{хп(2)} < \cdots < T_{хп(M)},$$

式中M——观察值。其次，令$C_\alpha = T_{Бп([M(1-\alpha)])}$，$C_\alpha' = T_{хп([M\alpha])}$。不难获得统计量$T_{Бп}$的临界值$C_\alpha$，因为变量是有$N-1$个随机变量均匀分布于[0,1]中的有序抽样。

置信估计和点估计 假设x——分布函数为$F(t)$的产品试验数据。为了确切起见，可以认为$F(t) = F(t,\theta)$，$\theta \in \Theta$，即属于某一参数族。现引入与置信下限和上限估计有关的一个未知参数θ的给定函数$g(\theta)$的基本概念。为了描述某一统计量$T(x)$作为$g(\theta)$下限估计的一致性，必须研究事件$\{T(x) \leqslant g(\theta)\}$的概率。因为参数值是未知的，所以也就自然地确定概率

$P_\theta\{T(x)\leqslant g(\theta)\}$ 为最小的最坏的θ

定义9 若

$$\inf_{\theta\in\Theta} P_\theta\{T(x)\leqslant g(\theta)\}\geqslant\gamma, \tag{4.31}$$

则称统计量$T(x)$为函数$g(\theta)$的**置信度为γ的置信下限**。

同理，可确定**置信度为γ的置信上限和双侧置信限**。

定义10 若

$$\inf_{\theta\in\Theta} P\{g(\theta)\leqslant T(x)\}\geqslant\gamma, \tag{4.32}$$

则称统计量$T(x)$为**函数g(θ)置信度为γ的置信上限**。

定义11 若对于两个统计量$T_1(x)\leqslant T_2(x)$，

$$\inf_{\theta\in\Theta} P\{T_1(x)\leqslant g(\theta)\leqslant T_2(x)\}\geqslant\gamma, \tag{4.33}$$

则称随机区间$[T_1(x),T_2(x)]$为$g(\theta)$的**置信度γ的置信区间**。

在（4.31）（4.33）式中，若取等号，则称置信度为γ；反之，称置信度不小于γ。

若$T'(x)$和$T''(x)$——对于所有x为$g(\theta)$和$T''(x)\leqslant T'(x)$的两个γ置信下限，则用$T'(x)$估计$g(\theta)$，比用$T''(x)$估计$g(\theta)$好。若由$g(\theta)<g(\theta')$得出$P_{\theta'}\{T(x)<g(\theta)\}\leqslant P_\theta\{T(x)\leqslant g(\theta)\}$，则称$g(\theta)$的γ置信下限$T(x)$为无偏估计。当然，γ置信限同假设检验准则有关。假定$T(x)$是$g(\theta)$的γ置信下限，$\gamma=1-\alpha$，将$T(x)$看作是检验假设$H_0=\{\theta;g(\theta)\leqslant g_0\}$的检验统计量，即检验$g(\theta)$不大于$g_0$的假设。拟定准则的方法如下：若$T(x)\leqslant g_0$，则接受假设$H_0$；若$T(x)>g_0$，则拒绝假设$H_0$。按照（4.31）式有

$$\inf_\theta P_\theta\{T(x)\leqslant g(\theta)\leqslant g_0\}\geqslant\gamma=1-\alpha,$$

因而

$$P_\theta\{T(x)>g_0\}\leqslant\alpha \text{对任意}\theta\in H_0.$$

因此，该准则的范围不大于$\alpha=1-\gamma$。

用这种方法可得出，利用γ置信上限$T'(x)$检验假设$H_0'=\{\theta;g(\theta)\geqslant g_0\}$，若$T'(x)\geqslant g_0$，则接受假设$H_0'$；反之，拒绝。这一准则范围也不大于$\alpha=1-\gamma$。

同样，统计准则也是获得γ置信估计的基础。关于γ置信估计问题将在第6章详细介绍。

在估计分布$F(t)=F(t,\theta)$的某些数字特征问题中，譬如，某一函数$g(\theta)$的数字特征，可专门利用适当选取的统计量$T(x)$，其值在一定程度上近似于被估计值。这种统计法称作**估计**。

若用$T(x)$估计$g(\theta)$，则将$M(T-g(\theta))$之差看作是参数θ的函数，叫做**偏差**。今后，当牛成分布函数$F(t)=F(t,\theta)$时，用$M_\theta T$表示统计量T的数学期望。若对于所有$\theta\in\Theta$，$M_\theta T=g(\theta)$，则称统计量$T(x)$为$g(\theta)$的无偏估计。方差$M(T-g(\theta))^2$常常看作是描述估计"质量"的主要指标。

每一个统计量$T(x)$，都能将数据空间Ы分成所谓统计量**元素**的非相交子集$A_T^t=\{x;T(x)=t\}$。如果两个统计量的所有元素都完全一样，则这两个统计量称为等价统计量。

例如，产品按$[N,Б,N]$方案试验，其无故障工作时间的分布属于参数为a，b的Γ分布

族。若$t_{(1)}$，…一顺序故障时间，则对于$\mathbf{x}=(t_{(1)},\cdots,t_{(N)})$的似然函数为

$$L(\alpha,\beta;\mathbf{x})=N!\left(\frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\right)^{N}\prod_{i=1}^{N}t_{(i)}^{\alpha-1}\exp\left\{-\beta\sum_{i=1}^{N}t_{(i)}\right\}. \tag{4.34}$$

若似然函数是未知参数$\alpha>0$，$\beta>0$的函数，则此函数就是统计量，而其值由变量$\prod_{i=1}^{N}t_{(i)}$，$\sum_{i=1}^{N}t_{(i)}$决定。这样一来，统计量（4.34）式就决定了如何将数据空间划分为元素，如二维统计量

$$T(\mathbf{x})=\left(\sum_{i=1}^{N}t_{(i)},\ \prod_{i=1}^{N}t_{(i)}\right).$$

定义12 若对于任意事件A和任意t，条件概率$P_{\theta}\{A|T(\mathbf{x})=t\}$与参数$\theta$无关，则称统计量$T(\mathbf{x})$为$\{F(t,\theta)\}$的**充分统计量**。若估计是充分统计量的函数，则称该估计为**充分估计**。

如果T'为无偏估计$g(\theta)$，而T''为充分统计量，则在给定$T''=t''$时取T'的条件数学期望后，便得到新的无偏估计$g(\theta)$，$T^{*}=M(T'|T'')$，其方差不超过原始估计T'的方差。这样一来，对充分统计量取均值，会改善原始估计的质量。

只有对任意$\mathbf{x}$，似然函数写作以下形式时

$$L(\theta,\mathbf{x})=h(\mathbf{x})g(T(\mathbf{x}),\theta), \tag{4.35}$$

统计量$T(\mathbf{x})$才是充分估计量。因为在充分统计量元素A_T中，条件分布与θ无关，所以充分统计量可能含有参数θ的所有信息，于是不需要对数据更详细地说明。若充分统计量T的全部元素本身包含任意其它充分统计量元素，或与其一致，则称T为**最小充分统计量**。

假定$\nu=\{\theta_1,\theta_2,\cdots\}$是一组参数值，即对于任意可能数据$\mathbf{x}$的似然参数之和$\sum_{\theta_i\in\nu}L(\theta_i,\mathbf{x})>0$可看作是所有可能参数$\theta$的统计量

$$T(\mathbf{x})=L(\theta,\mathbf{x})/\sum_{\theta_i\in\nu}L(\theta_i,\mathbf{x}),$$

就是最小充分统计量。

然而，最小充分统计量往往与所有的故障时刻集一致。于是，对于$[N,Б,r]$方案和威布尔、格涅钦科分布族来说，最小充分统计量与故障时间$(t_{(1)},\cdots,t_{(r)})$是等价的。

在数据无限多的条件下描述估计特性，象描述假设检验准则一样，很容易。设$\mathbf{x}_n$——按$\Pi_n=[N_n,Б,r_n]$（$\Pi'_n=[N_n,Б,T_n]$）方案进行试验的数据，其中$r_n\to\infty$，$N_n\to\infty$，$r_n\to\infty$（$T_n\to\infty$）。

定义13 当$n\to\infty$时，依概率$T\to g(\theta)$，则称估计量$T=T(\mathbf{x}_n)$为$g(\theta)$的**一致估计量**。

定义14 若存在

$$\lim_{n\to\infty}P_{\theta}\{[T-\mu_n(\theta)]/\sigma_n(\theta)\leqslant x\}=\Phi(x)$$

式中$\mu_n(\theta)$为渐近均值，$\sigma_n^2(\theta)$为渐近方差，则称$T=T(\mathbf{x}_n)$的估计为**渐近正态估计**。称变量$b_n(\theta)=(\mu_n(\theta)-g(\theta))/\sigma_n(\theta)$为**正态化偏差**。

定义15 若对于所有$\theta\in\Theta$，当$n\to\infty$，正态化偏差$b_n(\theta)\to0$，则称估计$T=T(\mathbf{x}_n)$为**渐近无偏估计量**。

渐近无偏估计量可以根据以方差进行比较。对于渐近方差为$\sigma_n'(\theta)^2$和$\sigma_n''(\theta)^2$的两个渐近无偏估计量T'和T''来说，T'对T''的渐近有效性等于

$$e_0(T',T'')=\lim_{n\to\infty}[\sigma_n''^2(\theta)/\sigma_n'^2(\theta)].$$

若渐近无偏估计和渐近正态估计的渐近有效性，对于其它任意渐近无偏和正态估计来说不小于1，则称这种估计为**最佳渐近正态估计**。

可利用不同的方法获得估计。以[N,Б,N]方案为例，估计的方法有：极大似然法、矩法、分位点法和最小二乘法。

用极大似然法估计时，可选取统计量 $\hat{\theta}=\hat{\theta}(x)$ 作为对参数θ的估计。此时

$$L(\hat{\theta},x)=\max_{\theta\in\Theta}L(\theta,x), \tag{4.36}$$

称满足（4.36）式的估计为**极大似然估计**。下面计算$\theta=(\theta_1,\cdots,\theta_m)$，式中$\theta_i$——第$i$个参数。若似然函数对$\theta_i$求偏导数，则方程组之解就是所求的估计。

$$\partial\ln L(\theta,x)/\partial\theta_i=0,\ i=1,\cdots,m. \tag{4.37}$$

矩阵的正恒定性是（4.37）式的解满足局部极大值$L(\theta,x)$的充分条件

$$I_m(\theta)=(I_{ij}(\theta)),\quad I_{ij}(\theta)=M_\theta\frac{\partial\ln L}{\partial\theta_i}\frac{\partial\ln L}{\partial\theta_j},\quad i,j=1,\cdots,m.$$

这里$\partial\ln L/\partial\theta_i$——在固定θ和给出试验结果x时，等于来自$\ln L(\theta,x)$对$\theta_i$偏导数的随机变量。称矩阵$I_m(\theta)$为**菲舍尔信息矩阵**。

通常，方程组(4.37)只能用逐渐近似法求解，例如牛顿—拉夫松（Ньютон—Рафсон）法。这时，取一致估计量$\hat{\theta}^0$作为初始值。为了进一步确定估计，可利用递推关系式

$$\hat{\theta}^{(l+1)}=\hat{\theta}^{(l)}-I_m^{-1}(\hat{\theta}^{(l)})U(\hat{\theta}^{(l)}),$$

式中$U(\theta)=\begin{pmatrix}U_1(\theta)\\ \vdots\\ U_m(\theta)\end{pmatrix}$ 其分量为$U_i(\theta)=\partial\ln L/\partial\theta_i$，$i=1,\cdots,m$；而$I_m^{-1}(\theta)$菲舍尔信息矩阵的逆阵。称向量$U(\theta)$为补充向量。

下面将较详细地研究，当$N\to\infty$时，对[N,Б,N]方案极大似然估计的渐近性。对$f(t,\theta)$，$(\theta=(\theta_1,\cdots,\theta_m))$的基本约束称为正则条件。这些约束包括：存在对θ足够光滑的密度$f(t,\theta)$；$f(t,\theta)>0$的t集与θ无关；$\ln f(t,\theta)$的数学期望值对θ_i可微分，肯定某一观测值的菲舍尔信息矩阵行列式：

$$I_m^{(1)}(\theta)=(I_{ij}^{(1)}(\theta)),\quad I_{ij}^{(1)}(\theta)=\int_0^\infty\frac{\partial\ln f(t,\theta)}{\partial\theta_i}\frac{\partial\ln f(t,\theta)}{\partial\theta_j}f(t,\theta)dt,$$

$$i,j=1,\cdots,m$$

以及与$\ln f(t,\theta)$的高阶导数数学期望值有关的补充约束。

当满足正则条件时，极大似然估计$\hat{\theta}=(\hat{\theta}_1,\cdots,\hat{\theta}_m)$是渐近正态估计，同时，其分量的联合分布也是渐近正态的：

$$\lim_{N\to\infty}\sqrt{N}M_\theta(\hat{\theta}_i-\theta_i)=0;\quad \lim_{N\to\infty}NM_\theta(\hat{\theta}_i-\theta_i)(\hat{\theta}_j-\theta_j)=C_{ij},$$

式中C_{ij}——矩阵$I_m^{(1)}(\theta)$的逆阵元。

若$\tilde{\theta}=(\tilde{\theta}_1,\cdots,\tilde{\theta}_m)$是渐近无偏估计和正则估计，则对于任意常数$c_1,\cdots,c_m$，当$N\to\infty$时，线性组合$c_1\tilde{\theta}_1+\cdots+c_m\tilde{\theta}_m$的方差渐近大于$c_1\hat{\theta}_1+\cdots+c_m\hat{\theta}_m$的方差。在这个意义上，极大似然估计是渐近最有效估计。例如，若$c_i=1$，$c_j=0$，$j\neq i$，则当$N\to\infty$，方差$\tilde{\theta}_i$渐近不小于方差$\hat{\theta}_i$。

许多实例表明，若破坏正则条件，用极大似然估计就会比用其它方法获取的估计较差。

假设函数$F(t)=F(t,\theta)$有k阶矩$g_k(\theta)=\int_0^\infty t^k dF(t,\theta)$，$k=1,\cdots,2m$。函数$g_k(\theta)$($k=1,\cdots,m$)给出各点$\theta=(\theta_1,\cdots,\theta_m)\in\Theta\subset R^m$与$m$维空间$R^m$各点$(g_1(\theta),\cdots,g_m(\theta))$的一对一和连续的对应值。于是方程组

$$g_k(\theta)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} t_i^k,\quad k=1,\cdots,m. \tag{4.38}$$

之解给定有根据的（在$N\to\infty$）估计$\hat\theta=(\hat\theta_1,\cdots,\hat\theta_m)$，此估计是渐近无偏和正则估计。向量极限分布$\sqrt{N}(\hat\theta-\theta)$是均值为零和协方差阵为$\sum_m=C^{-1}D(C^{-1})^T$的$m$维正态分布，式中$C^{-1}$——$C=(C_{ij})$的逆阵，$C_{ij}=\partial g_i(\theta)/\partial\theta_j$；$D=(d_{ij})$，$d_{ij}=g_{i+j}(\theta)-g_i(\theta)g_j(\theta)$，$i,j=1,\cdots,m$。

这种获得估计的方法，象求方程组（4.38）之解的方法一样，称为**矩法**。

对Γ分布族来说，解方程组（4.38）特别简便。这时，$\theta=(\alpha,\beta)$，$g_l(\hat\alpha,\hat\beta)=(\hat\alpha+l-1)(\hat\alpha+l-2)\cdots\hat\alpha/\hat\beta^l$，$m=2$。因此，方程组（4.38）变为

$$\hat\alpha/\hat\beta=\bar t;\quad (\hat\alpha+1)\hat\alpha/\hat\beta^2=\hat m_2.$$

式中$\bar t=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}t_i$；$\hat m_2=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}t_i^2$。

可用显式来解这些方程。结果，用矩法获取的参数α和β的估计为

$$\hat\beta=\bar t/(\hat m_2-\bar t^2);\quad \hat\alpha=\bar t^2/(\hat m_2-\bar t^2).$$

假设$F(t)=F(t,\theta)$有连续可微密度$f(t,\theta)$。按**分位点法**求估计时，给出$0<\gamma_1<\cdots<\gamma_m<1$的$m$个数。假设$t_\gamma(\theta)$——$\gamma$水平分位点，即$F(t_\gamma(\theta),\theta)=\gamma$。用分位点法求出的估计$\hat\theta=(\hat\theta_1,\cdots,\hat\theta_m)$作为方程组

$$t_{\gamma_i}(\hat\theta)=t([N\gamma_i]),\quad i=1,\cdots,m.$$

之解。式中$t([N\gamma_i])$——按$[N,Б,N]$方案试验时，第$[N\gamma_i]$次故障发生时刻。当$N\to\infty$时，用分位点法求出的估计是渐近无偏和正态估计。同时，当$N\to\infty$时，向量$\sqrt{N}(\hat\theta-\theta)$的渐近分布，是均值为零的$m$维正态分布和协方差矩阵$\sum_m=A^{-1}B(A^{-1})^T$，式中$A^{-1}$——矩阵$A=(a_{ij})$的逆阵，$B=(b_{ij})$；"$T$"——转置符号；$b_{ij}=\gamma_i(1-\gamma_j)/(f_if_j)$；$f_k=f(t_{\gamma_k}(\theta),\theta)$，$k=i,j$；$a_{ij}=\partial t_{\gamma_i}(\theta)/\partial\theta_j$，$i,j=1,\cdots,m$。

当$N\to\infty$时，可用向量$\sqrt{N}(\hat\theta-\theta)$的渐近正态分布来构成$\gamma$置信椭圆面。设向量$\sqrt{N}(\hat\theta-\theta)$的极限为$m$维正态分布，其均值为零和协方差矩阵$\Sigma=(\sigma_{ij}(\theta))$，此矩阵有逆阵$\Sigma^{-1}=(\sigma^{ij}(\hat\theta))$，$i,j=1,\cdots,m$。这样，当$N\to\infty$时，在极限中的二次型$N\sum_{i,j=1}^{m}\sigma^{ij}(\theta)(\theta_i-\hat\theta_i)(\theta_j-\hat\theta_j)$服从自由度为$m$的$\chi^2$分布。按照构成$\gamma$置信集的一般方法在极限中满足不等式

$$\sum_{i,j=1}^{m}\sigma^{ij}(\hat\theta)(\theta_i-\hat\theta_i)(\theta_j-\hat\theta_j)\le\chi^2_\gamma(m) \tag{4.39}$$

的所有θ'形成随机椭圆。当$N\to\infty$时，该随机椭圆是θ的γ置信集，即数据的生成分布函数$F(t,\theta)$以概率γ包含参数θ。这里的$\chi^2_\gamma(m)$　　　自由度为m的χ^2分布的γ水平分位点。

置信集（4.39）可用上述三种方法中的任何一种求出：极大似然法，矩法和分位点法。当然，这时必需利用对$\sigma^{-1}(\theta)$适用的表达式。

须指出，在某些问题中，将不同方法的方程联立起来，可获得良好的估计，例如，对于威布尔—格涅钦科三参数族，位置参数方程可用矩法方程求解，而形状参数和尺度参数可用极大似然法的方程求解。

下面来研究生成分布是两参数分布的情况：$F(t,\theta)=F_0((g(t)-\delta)/\sigma)$，$\theta=(\delta,\sigma)$，式中$g(t)$——非递减函数，$t>0$。假设按$[N,B,r]$方案进行试验，且$t_{(1)}<\cdots<t_{(r)}$是观察的故障时刻，又$g_{(k)}=(g(t_{(k)})-\delta)/\sigma$，$k=1,\cdots,r$。分布$g_{(k)}$同参数$\delta$和$\sigma$无关。因而，根据模型$F_0(x)$，可以计算$g_{(k)}$的各种特征量，设存在概率密度$f_0(x)=dF_0(x)/dx$。$g_{(k)}$的均值等于

$$a_k=\frac{N!}{(k-1)!(N-k)!}\int_0^\infty x[F_0(x)]^{k-1}f_0(x)[\bar F_0(x)]^{N-k}dx,\quad k=1,\cdots,N。\tag{4.40}$$

然而，在$k=l$和$k<l$时，二阶混合矩$Mg_{(k)}g_{(l)}$分别等于

$$b_{kk}=\frac{N!}{(k-1)!(N-k)!}\int_0^\infty x^2[F_0(x)]^{k-1}f_0(x)[\bar F_0(x)]^{N-k}dx;\tag{4.41}$$

$$b_{kl}=\frac{N!}{(k-1)!(l-k-1)!(N-l)!}\iint\limits_{0<x<y}xy[F_0(x)]^{k-1}$$

$$\times f_0(x)[F_0(y)-F_0(x)]^{l-k-1}f_0(y)[\bar F_0(y)]^{N-l}dxdy。$$

假设需求出参数δ和σ的线性函数

$$t=l_1\delta+l_2\sigma\tag{4.42}$$

的无偏估计。现仅限于$\sum\limits_{k=1}^{r}c_kg(t_{(k)})$的线性估计，利用均值$a_k$便得到

$$g(t_{(k)})=g_{(k)}\sigma+\delta=a_k\sigma+\delta+[g_{(k)}-a_k]\sigma;\tag{4.43}$$

再利用（4.43）式便得到

$$\sum_{k=1}^{r}c_kg(t_{(k)})=(\sum_{k=1}^{r}a_kc_k)\sigma+(\sum_{k=1}^{r}c_k)\delta+\sum_{k=1}^{r}c_k(g_{(k)}-a_k)\sigma。\tag{4.44}$$

因为$g_{(k)}$与均值之差$g_{(k)}-a_k=0$，所以根据（4.44）式，只有当

$$\sum_{k=1}^{r}a_kc_k=l_2,\quad \sum_{k=1}^{r}c_k=l_1\tag{4.45}$$

时，在所有可能值δ和σ条件下，才能满足无偏条件l。线性估计的方差$\sum\limits_{k=1}^{r}c_kg(t_{(k)})$等于$\sigma\sum\limits_{k=1}^{r}c_kg_{(k)}$，即等于$\sigma^2\sum\limits_{k,l}c_kc_lb_{kl}$。

这样一来，为获得有最小方差线性函数的无偏估计（4.42）式，必须计算出一组系数$c_1,\cdots,c_r$。这组系数可在（4.45）式约束条件下将其二次型

$$\sum_{k,l=1}^{r}c_kc_lb_{kl}\tag{4.46}$$

变换为最小值

这是用数字法解最优化的典型课题。利用拉格朗日不定乘数法，可容易地写出最佳值c_i的方程。例如，当$l_1=1$，$l_2=0$时，用此方法可以获得δ的估计；当$l_1=0$，$l_2=1$时，可获得σ的估计；而当$l_1=x_p^0$，$l_2=1$（其中x_p^0——水平分位点p，$F_0(x_p^0)=p$）时，可获得分布函数$F_0((x-\delta)/\sigma)$水平分位点p的估计$\widehat{l_p}$。在所有线性无偏估计类中，估计的方差是最小方差，从这种意义来说，所有这些估计是最佳无偏估计。须注意，可把$g^{-1}(\widehat{l_p})$看作是分布$F(t)=F_0((g(t)-\delta)/\sigma)$的水平分位点$p$的估计。然而，若$g(t)$——非线性函数，此估计就不是无偏估计了。

本节所研究的数理统计概念和方法，仅仅给出了关于估计理论和统计假设检验的基本概念。根据各种方案的试验结果获得故障数据，是划分可靠性理论统计课题的主要根据。一般数理统计中，重点研究[N,Б,N]方案。

在参考文献[88]中，列曼(Леман)阐述了统计假设检验的一般理论基础。其中详尽地论述了置信估计与假设检验准则的关系。在参考文献[79]中，科克斯(Кокс)和赫克勒(Хинкл)阐述了统计推断理论，并附有实例图。该书的主要章节都用来论述包括极大似然估计在内的估计的渐近性和置信估计。在参考文献[54]中，扎克斯(Закс)对估计理论基础作了详细的论述，必须特别提出在参考文献[124]中，拉奥(Рао)不仅阐述了一般估计问题，而且阐述了多维统计分析和线性模型等数理统计的重要问题。在参考文献[44]中，提出了用指数分布族描述的各种试验方案的假设检验和估计方法。在参考文献[202]中，详尽地论述了与参数估计和三参数族威布尔—格涅钦科分布的假设检验有关的问题。在Technometrics杂志上发表的许多论文中，为这类问题也作了研究，例如参考文献[199,201]。在参考文献[155,178]中，对对数正态分布族和威布尔—格涅钦科分布族的检验准则作了研究。上述有关在老化的各种择一条件下，生成函数$F(t)$属于指数族的假设检验问题，美国科学家已作了研究。在参考文献[204]中，对序$<_*$的单调功效准则与检验统计相符的问题作了论述。以统计量$T_Б$、$T_{Бл}$和$T_{кп}$为基础的准则性质，在参考文献[157,170,194]中作了研究。在参考文献[160]中，巴罗和普罗尚对类似$T_{Бл}$的各类累加检查试验方案的统计作了研究。在分析已检査的数据时特别适宜的，且对于可靠性理论也是很重要的贝叶斯分析法，在本章中没有涉及。关于贝叶斯法的基本知识，可参考参考文献[79]。包括贝叶斯法的一般估计理论问题，请看参考文献[55]。

在参考文献[163,164]中，巴罗和普罗尚用贝叶斯方法对可靠性数据进行了充分的统计分析。根据试验结果获得统计结论的贝叶斯方法，与本章所述的获得统计结论的方法有本质的不同。这一方法具有许多优点，尤其是内部逻辑简单。所研究的分布族参数化是目前贝叶斯方法理论的基本缺点。首先，假设无故障工作时间分布函数属于某些参数族的分布，即为$F(t)=F(t,\theta)$，$\theta\in\Theta$。用贝叶斯方法获得Θ集的数据前，给出了**先验分布**$A(B)$，$B\subset\Theta$。先验概率$A(B)$可理解为在集合B中求得参数θ值的置信度。参数θ决定了无故障工作时间分布函数。若选择的先验分布不适当，则不能正确地进行下一步推论。假设根据试验获得数据D，计算后验分布$A(B|D)$。若先验分布的密度为$a(\theta)$，则计算后验概率密度$a(\theta|D)$时，可利用贝叶斯公式

$$a(\theta|D)=L(\theta,D)a(\theta)\Big/\int_{\Theta}L(\theta',D)a(\theta')d\theta', \tag{1.47}$$

式中$L(\theta,\mathbf{D})$——似然函数。

符合N个产品试验方案的数据$\mathbf{D}$为

$$\mathbf{D}=\{t_{i_1},\cdots,t_{i_d},\ S_{j_1},\cdots,S_{j_k}\},\quad d+k=N. \tag{4.48}$$

式中$I=\{i_1,\cdots,i_d\}$——故障产品的集合，而$J=\{j_1,\cdots,j_k\}$——未故障产品（其故障未检查出）的集合。现在来研究获得检验参数数据的下列集。以$2N$个随机变量集$\{t_1,\cdots,t_N;s_1,\cdots s_N\}$为根据，其中$t_i$是分布为$F(t,\theta)$的相互独立的随机变量。变量$S_i$是检查时间，即只有当$s_i\geqslant t_i$时，$t_i$才是已知的，若$t_i>s_i$，则只有时刻$s_i$是已知的。确定数据进行非参数检验的试验方案属于哪一种方案，在$t_1,\cdots,t_N(s_{i_1}>t_{i_1},\cdots,s_{i_d}>t_{i_d})$条件下，此类方案$s_1,\cdots,s_N$仅取决于$t_{i_1},\cdots,t_{i_d}$。$[N,Б,T]$方案和$[N,Б,r]$方案属这一类型。

对于非参数检验方案，似然函数为

$$L(\theta,\mathbf{D})=\prod_{i\in I}\lambda(t_i,\theta)\exp\{-\int_0^\infty N(t)\lambda(t,\theta)\mathrm{d}t\}C(\mathbf{D}). \tag{4.49}$$

式中$\lambda(t,\theta)=f(t,\theta)/\overline{F}(t,\theta)$，$f(t,\theta)=\mathrm{d}F(t,\theta)/\mathrm{d}t$；$N(t)$——时刻$t$受试产品数；$C(\mathbf{D})$只取决于$\mathbf{D}$，而与$\theta$无关。

若$\overline{F}(t,\theta)=\exp\{-\lambda t\}$，则由(4.48)式可得出

$$L(\lambda,\mathbf{D})=\lambda^d\exp\{-\lambda S\}C(\mathbf{D}). \tag{4.50}$$

式中S——总工作时间。这样一来，对于任意非参数检验和指数分布方案，序偶(d,S)为充分统计量，其中d——故障数。若对于$[N,Б,r]$和$[N,Б,T]$方案，从(4.49)式和贝叶斯公式(4.47)中得出的故障数和总工作时间是一致的，则对于指数分布，后验概率密度值$d(\lambda|\mathbf{D})$也将是一致的。

第五章 部件可靠性的统计推断

§5·1 无故障工作时间服从指数分布时的参数估计

关于无故障工作时间分布函数指数性质的假设检验 对于分布函数是指数分布的假设及其检验的问题，须引起足够的重视。在数理统计的大部分专著中，对这类问题都阐述得很清楚。下面，举例说明指数分布值得非常注意的原因。指数分布可以看作是极值分布。一般，可修复冗余系统可能产生这种分布。众所周知，如由外部原因（强烈的冲击，突然地过电压变化等等）引起的故障，无故障工作时间很近似指数分布。指数分布族可以看作是介于老化与非老化函数族之间的边缘族（在§4·2中已作了研究）。有时，指数分布可以看作是许多分布中"最佳"的分布。正是通过这一途径才有可能求得老化分布函数分位点的置信估计（见§5·2）。还有一个常见的原因，即指数分布族可获得完整的和就其本身来说是最佳的数学结果。充分估计在大多数情况下常常可顺利地获得合适的统计方法。在本节中将研究（4.4）式（$\mu=0$）的单参数族问题。

解任何统计问题的方法，在相当大的程度上决定于试验方案的类型。当检验试验数据的生成分布族时，一般原假设首先选为指数分布族（4.4）式（$\mu=0$）。因此，关于求参数λ或$\theta=1/\lambda$值的问题只是次要的。最简单的检验方法就是在概率纸上做分布函数图。如果在平面（t, Λ）上作寿命函数$\Lambda(t)=-\ln\hat{F}(t)$图，则当$F(t)$属于（4.4）式（$\mu=0$）时，则$\Lambda(t)=\lambda t$是从直角坐标系原点引出的直线，该直线是斜率为$\lambda$的直线，亦即，若$\hat{\Lambda}(t)=\ln\hat{F}(t)$的图象是直线而与$F(t)$无关，则分布函数是指数分布$F(t)=1-e^{-\lambda t}$的。对§4·1中描述的[$N$, Б, T]、[N, Б, r]和[N, Б(r, T)]方案来说，可取

$$\hat{F}(t)=d(t)/N \qquad (5.1)$$

作为$F(t)$的估计，式中$d(t)$等于时刻t前的故障数，$t\leqslant t_r$。图5.1中引用的$\hat{\Lambda}(t)$是根据[$N=20$, Б, $r=8$]方案试验的结果用（5.1）式计算的。

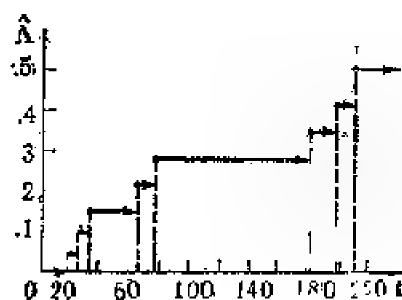


图5.1

对（4.4）式（$\mu>0$）两参数族来说，在作$\Lambda(t)=-\ln F(t)$图时，也将获得直线线段，不过，它不是从坐标原点引出的，而是从点$t=\mu>0$引出的。因而，利用（5.1）式来估计，也可获得近似于上述线性函数$\hat{\Lambda}(t)$图。

若$F(t)$属于老化分布族，则$\Lambda(t)$向下凸。当$\hat{\Lambda}(t)$明显地下凸时，则必须拒绝$F(t)$是指数分布的假设，而选择$F(t)$是老化分布函数的假设。同样，当$\hat{\Lambda}(t)$有上凸趋势时，应选

择$F(t)$是非老化分布函数的假设。这样说明如何获得统计结论是不准确的，尤其是它没有指出第一和第二类错误的概率。尽管如此，在可靠性试验数据处理的最初阶段，仍然可成功地利用图解法。用图解法可指出，应首先采用什么样的准确方法，并在这种情况下可得出什么样的结果。为了检验指数分布的假设，必须首先假设分布函数$F(t)$是已知的，然后利用（4.4）式进行检验。从参考文献[120]中知，r个独立随机变量$\xi_1,\cdots,\xi_r$的函数$F(t)$的指数性质的唯一特点是

$$\eta_r=\xi_1+\cdots+\xi_r \text{和} \zeta_1=\frac{\xi_1}{\xi_1+\xi_2},\ \zeta_2=\left(\frac{\xi_1+\xi_2}{\xi_1+\xi_2+\xi_3}\right)^2,$$

$$\cdots,\ \zeta_{r-1}=\left(\frac{\xi_1+\cdots+\xi_{r-1}}{\xi_1+\cdots+\xi_r}\right)^{r-1}. \tag{5.2}$$

是相互独立的；同时，η_r服从Γ分布，而ζ_i（$i=1,\cdots,r-1$）在区间[0,1]上是均匀分布。在参考文献[24]中指数性质检验准则就是以这一结果为基础的。在可靠性理论问题中，这一准则可用下列方式描述。假定按[N,Б,r]方案进行试验，这时必须取

$$s_1=Nt_{(1)},\ s_2=(N-1)(t_{(2)}-t_{(1)}),\ \cdots,$$
$$s_r=(N-r+1)(t_{(r)}-t_{(r-1)}). \tag{5.3}$$

作为变量$\xi_i=s_i$，然后将已求出的（5.3）式之值代入（5.2）式。可按柯尔莫戈罗夫准则来检验ζ_1，…，ζ_{r-1}值分布的一致性。为此，必须确定根据（5.2）式值构成的经验分布函数与均匀分布之间的"偏差"，即

$$D_r=\max_{1\leqslant i\leqslant r-1}\left\{\left|\frac{i-1}{r}-\zeta_i\right|,\ \left|\frac{i}{r}-\zeta_i\right|\right\}. \tag{5.4}$$

在参考文献[26]的表6.2中给出了$D_{r,\alpha}$值，这个比值满足$P(D_r\geqslant D_{r,\alpha})\leqslant\alpha$，$\alpha=0.2$；0.1；0.05；0.02；0.01。若按公式（5.4）求得的值大于$D_{r,\alpha}$，则拒绝关于$F(t)$属于（4.4）式（$\mu=0$）族的假设。这时错误拒绝概率不大于α。可采用稍作修改的准则，来检验（4.4）式（$\mu\neq0$）的两参数族的隶属关系。这时必须利用（5.3）式计算的除第一值以外的全部值s_i（$i=2,\cdots,r$），即令$\xi_1=s_2$，…，$\xi_{r-1}=s_r$，且以r代替$r-1$。

为检验指数性质，可利用顺序统计量$T=T(t_{(1)},\cdots,t_{(r)})$，即对于这个统计量来说，在任意$\nu>0$时，$T(\nu t_{(1)},\cdots,\nu t_{(r)})=T(t_{(1)},\cdots,t_{(r)})$。

下述的统计量就是顺序统计量的例子。

$$T_B=\frac{\bar{s}}{\nu},\quad \bar{s}=\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}s_i,$$

$$\nu^2=\frac{1}{r-1}\sum_{i=1}^{r}(s_i-\bar{s})^2.$$

若r很大，并利用近似服从正态分布的T_B，当$\sqrt{r}(T_B-1)>u_{1-\alpha/2}$时（其中$u_{1-\alpha/2}$一标准正态分布的$1-\alpha/2$水平分位点），则须拒绝指数分布假设。在参考文献[166]中研究了以统计量T_B为基础的准则的渐近效率，这里的Γ分布族（见第一章）和（4.5）式的威布尔格涅钦科分布族，看作是竞争族。

对某些竞争假设的指数检验准则，有时也能引起人们的注意。例如，按[N，Б，r]方案

试验，且当故障时间间隔较大时，为检验指数分布假设，可用菲舍尔提出的统计量（见参考文献[188]）来检验，

$$T_G = \max_{1\le k\le r} s'_k / \sum_{k=1}^{r} s'_k. \tag{5.5}$$

式中 $s'_k = t_{(k)} - t_{(k-1)}$，$t_{(0)} = 0$。在参考文献[44]中引用了临界值 $g_\alpha(r)$（其中 $r=n$，$\alpha=0.05$，而 $r=5(5)50$*）。（5.5）式的统计量适用于[N，Б，N]方案，令 $s'_k = t_k$；也适用于[N，Б，r]方案，令 $s'_k = s_k$（其中 s_k 用(5.3)式确定）。所谓准则就是：当 $T_G > g_\alpha(r)$ 时，拒绝指数假设；反之，接受此假设。

为检验指数假设，可利用哈尔特利统计量（见参考文献[193]）

$$T_X = \max_{1\le k\le r} s'_k / \min_{1\le k\le r} s_k$$

作为检验统计量。当 $T_X > h_\alpha = h_\alpha(r)$ 时，拒绝指数分布假设，对于 $\alpha=0.05$ 和 $\alpha=0.1$，$r=2(1)12$，临界水平值 h_α 由参考文献[44]给出。

（4.4）式的两参数分布函数族可以看作是生成分布族 $F_0(t)=1-e^{-t}$，亦即 $F(t;\lambda,\mu)=F_0(\lambda(t-\mu))$。因而可利用关于线性群的最大变换常数

$$t' = bt + a \tag{5.6}$$

来构成检验下列假设的不变一致最大功效准则。将服从（4.4）式（$\mu=0$）分布族，看作是原假设；而分布服从两参数 $F_1(\nu(t-\kappa))$ 族（其中 $F_1(t)\ne F_0(t)$，而 $\nu>0$，$-\infty<\kappa<+\infty$），看作是竞争假设。这些准则正是在检验统计量是（5.6）式的最大变换常数的基础上构成的。

假定按[N，Б，r]方案进行试验，和仅仅只有从第 l 次（$l<r$）故障以后的故障数据是已知的。从第 l 次到第 r 次故障的总工作时间等于

$$S_\Sigma(t_{(l)},\cdots,t_{(r)}) = (t_{(l+1)} - t_{(l)}) + (t_{(l+2)} - t_{(l)}) + \cdots + (t_{(r-1)} - t_{(l)}) + (N-r+1)(t_{(r)} - t_{(l)}) = s_{l,1} + \cdots + s_{l,r-l}$$

式中 $s_{l,k} = (N-l-k+1)(t_{(l+k)} - t_{(l+k-1)})$，即从发生第（$l+k-1$）次到第（$l+k$）次故障的总工作时间。在这种条件下，统计量

$$T_\nu = (t_{(r)} - t_{(l)})/S_\Sigma(t_{(l)},\cdots,t_{(r)}) \tag{5.7}$$

为（5.6）式的最大变换常数。在参考文献[214]中，引用了统计量（5.7）的生成分布属于 $F_0(t)=1-e^{-t}$ 和 $F_0(t)=t$，$0\le t\le 1$ 的分布函数族。

以检验统计量(5.7)式为基础的准则，就是把分布服从（4.4）式两参数指数族的假设，与分布服从均匀分布的竞争假设进行比较检验的不变一致最大功效准则。

关于指数分布函数参数的假设检验 首先，来研究（4.4）式（$\mu=0$）的单参数指数分布族。取假设 $H_0=\{\lambda:\lambda\le\lambda_0\}$ 作为原假设，而取假设 $H'_1=\{\lambda:\lambda>\lambda_0\}$ 或 $H_1=\{\lambda:\lambda\ge\lambda_1\}$ 作为竞争假设。可用§4·3的似然函数为基础确定统计量，按照诺伊曼-皮尔逊定理拟定准则。

将故障数据表示为顺序故障时间序列 $t_{(1)}\le\cdots\le t_{(r)}$，或向量 $\mathbf{x}=(t_{(1)},\cdots,t_{(r)})$ 时，可较简便地求出对[N，Б，r]方案的最大功效准则。当 $\mu=0$ 时，（4.4）式的似然函数为

---

* $r=5(5)50$ 表示，从5到50的每次增量为5的所有数字，即5，10，15，…，45，50，在一般情况下，$a(b)c$ 表示数列 a，$a+b$，$a+2b$，…，$a+(k-1)b$，$a+kb=c$，共 $k+1$ 次。

$$L(\lambda,x)=N^{(r)}\prod_{i=1}^{r}\lambda e^{-\lambda x_i}[e^{-\lambda x_r}]^{N-r}=N^{(r)}\lambda^r\exp\{-\lambda S_B(t_{r,r})\},\qquad(5.8)$$

$$N^{(r)}=N(N-1)\cdots(N-r+1)。$$

因而，由（4.2）式决定的[illegible]分能计算。由于$S_B(t_{r,r})=s_1+\cdots+s_r$，（其中$s_i=(N-i+1)(t_i-t_{i-1})$是[illegible]参数为$\lambda$的指数分布独立随机变量），所以$2\lambda S_B(t_{r,r})$服从具有$2r$自由度的$\chi^2$分布。因而

$$P\{2\lambda S_B(t_{r,r})\leqslant x\}=H_{2r}(x)=\int_0^x\frac{t^{r-1}}{2^r(r-1)!}e^{-t/2}dt=1-L_{r-1}\left(\frac{x}{2}\right)。\qquad(5.9)$$

式中$L_{r-1}(x/2)$是参数为$x/2$的泊松分布（4.14）。由（5.9）式得知，对于两个简单假设$\lambda=\lambda'$和$\lambda=\lambda''$，似然比为

$$\frac{L(\lambda'',x)}{L(\lambda',x)}=\exp\{-(\lambda''-\lambda')S_B(t_{r,r})\}。\qquad(5.10)$$

所以，总工作时间$S_B(t_{r,r})$与似然比（5.10）是等效的统计量。据根诺伊曼-皮尔逊定理，对原假设H_0与竞争假设H_1'或H_1''进行比较检验的最大功效准则如下：若$S_B(t_{r,r})\geqslant s_\alpha$，则必须接受原假设；反之，必须拒绝，而接受假设$H_1'$或$H_1''$。根据（5.9）式，由关系式$H_{2r}(2\lambda_0 s_\alpha)=\alpha$中求出临界水平$s_\alpha$，即$2\lambda_0 s_\alpha$是具有自由度$2r$显著性水平$\alpha$的$\chi^2$分布百分位点$\chi^2_\alpha(2r)$。由此可得

$$s_\alpha=\chi^2_\alpha(2r)/(2\lambda_0)。\qquad(5.11)$$

当参数值等于λ时，不难得出拒绝假设H_0的概率，即功效函数$\beta(\lambda)$的表达式。由于$2\lambda S_B(t_{r,r})$服从χ^2分布，所以功率函数的表达式为

$$\beta(\lambda)=P_\lambda\left\{S_B(t_{r,r})<\frac{\chi^2_\alpha(2r)}{2\lambda_0}\right\}=P_\lambda\left\{2\lambda S_B(t_{r,r})<\frac{\lambda}{\lambda_0}\chi^2_\alpha(2r)\right\}$$

$$=H_{2r}\left(\frac{\lambda}{\lambda_0}\chi^2_\alpha(2r)\right)=1-L_{r-1}\left(\frac{\lambda}{2\lambda_0}\chi^2_\alpha(2r)\right)。\qquad(5.12)$$

最后一个等式可利用泊松分布表，并依$H_{2r}(x)$的显式（5.9）用分部积分导出。假定在$\lambda_1>\lambda_0$时，使$\beta(\lambda_1)\geqslant1-\beta$。这说明，若假设$H_1'$是正确的，错误接受假设$H_0$的概率不大于$\beta$。$\beta(\lambda)$随$\lambda$单调递增，所以由（5.12）式获得：

$$\lambda_1/\lambda_0\geqslant\chi^2_{1-\beta}(2r)/\chi^2_\alpha(2r)，\qquad(5.13)$$

则满足不等式$\beta(\lambda_1)\geqslant1-\beta$。百分位点比值大于1，并在接近1时，随$r$单调递减。经选择求得最小值$r_{min}$，这时必满足（5.13）式。按$[N,B,r]$（$r\geqslant r_{min}$）方案进行试验时，以检验假设$H_0$和$H_1'$时具有（5.11）式临界值的统计量$S(t_{r,r})$为基础的准则，犯第一类错误的概率为$\alpha$和犯第二类错误的概率不大于$1-\beta$。

当r大时，利用对正态分布的χ^2分布近似法，可获得r_{min}的近似表达式

$$r_{min}\sim1/4+[(u_{1-\beta}+u_\alpha\sqrt{\kappa})/(2\sqrt{\kappa}-1)]^2。$$

式中$\kappa=\lambda_1/\lambda_0$，$u_\alpha$、[illegible]为$p=\alpha$和$p=1-\beta$的标准正态分布的水平分位点。参考文献[70]表明，菲舍尔在[134]中提出的这一公式，给出了一个很好的近似法。为了选择适当的N，从计算平均试验时间开始计算最方便。对于$[N,B,r]$方案，平均试验时间等于

$$T(N,r)=\frac{1}{\lambda}\sum_{l=N-r+1}^{N}\frac{1}{l}.\tag{5.14}$$

若$N\geqslant10$，而$r>4$时，则必须利用较简单的渐近公式来代替（5.14）式

$$T(N,r)\approx\frac{1}{\lambda}\left[\ln\frac{N}{N-r}-\frac{r}{2N(N-r)}\right].\tag{5.15}$$

假定T_0——当$\lambda=\lambda_0$时，满意的平均试验时间。将T_0代入（5.14）式或（5.15）式的左端，而将$\lambda=\lambda_0$和$r=r_{m,n}$代入右端，便得到关于N的方程。解此方程并四舍五入得出最接近的整数后，便给出未知的$N_{m,n}$。若$r_{m,n}$不很大，则$\lambda=\lambda_0$和$T=T_0$时，在（5.14）式的左端，用$1/l$代替$1/(N_{m,n}-r_{m,n})$，便得到不等式

$$\lambda_0\leqslant\lambda_0 r_{m,n}/(N_{m,n}-r_{m,n});$$

$$N_{m,n}\leqslant r_{m,n}/(\lambda_0T_0)+r_{m,n}.$$

增加受试产品数，使减少平均试验时间。因此，对$[N,Б,r_{m,n}](N\geqslant r_{m,n}/(\lambda_0T_0)+r_{m,n})$方案来说，当$\lambda=\lambda_0$时，平均时间不大于$T_0$。因此，如果选择由（5.11）式决定的$s_\alpha$作为总工作时间的临界值，则犯第一和第二类错误的概率不大于α和β。当$\lambda>\lambda_0$时，平均试验时间将显然小于T_0。

产品在进行可靠性试验时，可利用$[N,Б,T]$方案。假定当受试产品在时刻t发生的故障数为$d(t)=d$时，x_0符合无故障条件，而向量$\mathbf{x}=(t_{(1)},\cdots,t_{(d)})$是由故障时刻$t_{(1)}\leqslant t_{(2)}\leqslant\cdots\leqslant t_{(d)}$构成的。若受试产品服从指数分布(4.4)式($\mu=0$)，则似然函数

$$L(\lambda;\mathbf{x})=\begin{cases}\exp\{-\lambda NT\},\mathbf{x}=x_0;\\ N^{(d)}\lambda^d\exp\{-\lambda S_Б(T)\},\mathbf{x}\neq x_0(d>0).\end{cases}\tag{5.16}$$

式中$S_Б(T)$——在$t=T$时，由（4.1）式决定的总工作时间。由（5.10）和（4.35）式中得出，$(d(T),S_Б(T))$是充分统计量。由点(r,y)，$x=0,1,\cdots,N$，$(N-x)T\leqslant y\leqslant NT$构成的平面线段（图5.2中粗实线）符合充分统计量可能值。如果$d(T)=k$，则总工作时间$S_Б(T)=t_{(1)}+\cdots+t_{(k)}+(N-k)T$，即概率平面为$f_k(t)=\lambda e^{-\lambda t}/(1-e^{-\lambda T})$的相互独立随机变量之和为$k$，并再增加常数$(N-k)T$。对于每个$k$来说都可写出$f_k(t)$的解析表达式，但是随着$k$的增加，此式将复杂化。随着$k$的增加，可用正态分布密度近似$f_k(t)$，这就是简化条件。若$d(T)=k,k>0$，则假定$F_\lambda(s;k)$——$S_Б(t)$的条件分布函数。由于试验时产品发生故障是相互独立的，则统计量$d(T)$服从参数为N和$1-e^{-\lambda T}$的二项分布，即

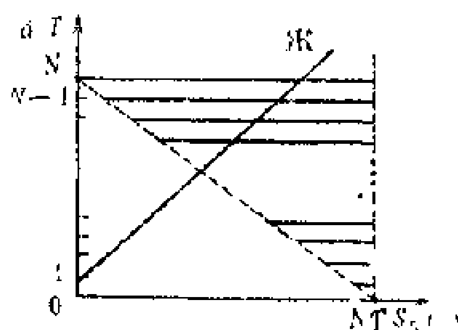


图 5.2

$$P_\lambda\{d(T)=k\}=b_N^k(1-e^{-\lambda T}).\tag{5.17}$$

在（5.17）式中利用了（4.10）式的表示法。

现在来研究原假设H_0^-与竞争假设H_1^+检验的比较问题。假定$P_{\lambda_0}(d(T)=0)=e^{-\lambda_0 T}<1-\alpha$。按照诺伊曼-皮尔逊定理和公式（5.16），最大功效准则有由不等式决定的临界集

$$(\ln(\lambda_1/\lambda_0))d(T)-(\lambda_1-\lambda_0)S_B(T)>C_\alpha, \tag{5.18}$$

可求常数值C_α作为方程对c的解

$$\sum_{k=1}^{N} F_{\lambda_0}(R(k,c);k)b_N^k(1-e^{-\lambda_0 T})=\alpha. \tag{5.19}$$

式中$R(k,c)=\max\{(N-k)T, [\ln(\lambda_1/\lambda_0)-c](\lambda_1-\lambda_0)^{-1}\}$。

由（5.18）和（5.19）式决定的准则如下：若充分统计量（$d(T)$, $S_B(T)$）满足不等式（5.18），就必须拒绝假设H_0，而接受假设H_1；若满足与（5.18）式相反的不等式，就须接受假设H_0。当$\lambda\leqslant\lambda_0$时，犯第一类错误的概率不大于$\alpha$；当$\lambda=\lambda_1$时，同第一类错误不大于$\alpha$的准则相比，这一准则具有最大功效。由（5.18）和（5.19）式决定的准则不是一致最大功效准则（PHM准则），因为常数C_α不仅取决于λ_0，而且取决于λ_1。这一准则的功效函数可按下式计算：

$$\beta(\lambda)=\sum_{k=1}^{N} F_\lambda(R(k,C_\alpha);k)b_N^k(1-e^{-\lambda T}). \tag{5.20}$$

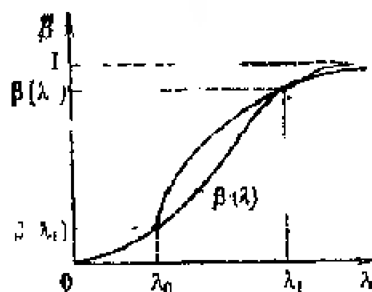


图 5.3

若在（5.18）和（5.19）式中将λ_1看作是参数，则$\beta(\lambda_1)$是对假设H_0与假设H_1进行比较检验时任意准则的功效函数的上包络。在某λ_1时，（5.20）式的功效函数距上包络不远（图5.3中划出的粗实线），则此λ_1的选择就是合理的。在λ_1使$0.05\leqslant\beta(\lambda_1)\leqslant0.15$时，则$\lambda_1$将可能具有这种特性。

假设无论当$\lambda=\lambda_0$时，还是当$\lambda=\lambda_1$时，按[N, B, T]方案试验时，$d(T)/N$很小的概率很大。这样，仅根据统计量$d(T)$就可制定检验假设H_0和H_1的较小功效准则。在采用这一方法时，须选择最小整数c，即在此整数时

$$\sum_{k=c+1}^{N}\binom{N}{k}(1-e^{-\lambda_0 T})^k e^{-(N-k)\lambda_0 T}\leqslant\alpha. \tag{5.21}$$

若$d(T)>c$，则拒绝假设H_0，并接受竞争假设H_1；反之（即在$d(T)\leqslant c$时），接受假设H_0。此准则的功效函数

$$\beta(\lambda)=\sum_{k=c+1}^{N} b_N^k(1-e^{-\lambda T}).$$

必须指出，若（5.21）式的左端实质上小于α，则当c值不大时，犯第一类错误概率α的风险可明显地增加。因此必须利用随机化准则，用随机方式选出c或$c-1$两者之一。抽出c和$c-1$的概率p_c, p_{c-1}根据以下条件求出

$$p_c\sum_{k=c+1}^{N} b_N^k(1-e^{-\lambda_0 T})+(1-p_c)\sum_{k=c}^{N} b_N^k(1-e^{-\lambda_0 T})=\alpha,$$

$$p_{c-1}=1-p_c$$

假定原假设是两参数指数分布族（4.4）式（$\mu>0$）。对于此族，要注意关于参数值μ绝对保障无故障工作时间的假设检验问题，然而这时的λ可能是“混合”参数。现在仅对[N, B, r]方案进行研究。按此方案进行试验时，似然函数为

$$L(\lambda,\mu,x)=N^{(r)}\lambda^r\chi(t_{(1)}-\mu)\exp\{-\lambda\sum_{i=1}^{r}(t_{(i)}-\mu)\}$$
$$\times[\exp\{-\lambda(t_{(r)}-\mu)\}]^{N-r}=N^{(r)}\chi(t_{(1)}-\mu)$$
$$\times\exp\{-N\lambda(t_{(1)}-\mu)\}\exp\{-\lambda S_B(t_{(1)},\ldots,t_{(r)})\}. \tag{5.22}$$

式中当 $x<0$ 时，$\eta(x)=0$；当 $x\geq 0$，$\eta(x)=1$。在$[t_{(1)},t_{(r)}]$区间内的总工作时间为

$$S_B(t_{(1)},t_{(r)})=(N-1)(t_{(2)}-t_{(1)})+\cdots+(N-r+1)(t_{(r)}-t_{(r-1)}) \quad (5.23)$$

从（4.35）和（5.22）式中得出，向量（$t_{(1)}$，$S_B(t_{(1)},t_{(r)})$）是充分统计量。由于在时刻 $t=\mu$ 之后，故障时刻分布是参数为 λ 的指数分布，所以 $\eta_1(\mu)=N(t_{(1)}-\mu)$，$\eta_2=(N-1)\times(t_{(2)}-t_{(1)})$，…，$\eta_r=(N-r+1)(t_{(r)}-t_{(r-1)})$是相互独立的随机变量，并服从参数为 λ 的指数分布。由此得出 $2\lambda\eta_1(\mu)$和$2\lambda\sum_{k=2}^{r}\eta_k$是分别服从具有 2 和$2r-2$个自由度的$\chi^2$分布的独立随机变量。现在来研究随机变量

$$T_F(\mu)=\frac{(r-1)\eta_1(\mu)}{2\sum_{k=2}^{r}\eta_k}=\frac{(r-1)N(t_{(1)}-\mu)}{2S_B(t_{(1)},t_{(r)})}. \quad (5.24)$$

如果参数真值 $\mu=\mu_0$，则$T_F(\mu_0)$服从自由度为$(2,2r-2)$的F分布。由（5.23）和（5.24）式得出，$T_F(\mu)$随着 μ 的增加而减少。因而，与 λ 无关的$F(x)=P_{\mu,\lambda}\{T_F(\mu_0)\leqslant x\}$，对所有 x 是 μ 的递减函数。于是，可制定无偏准则用之检验假设 $H_0(\mu_0)=\{\mu\leqslant\mu_0\}$ 与竞争假设 $H^+(\mu_0)=\{\mu>\mu_0\}$，以便比较。若真值 $\mu=\mu_0$，则

$$T_F(\mu_0)\leqslant(r-1)[\alpha^{-1/(r-1)}-1] \quad (5.25)$$

的概率不大于$1-\alpha$。在参考文献[183]中给出，（5.25）式的右端是服从自由度为（2，$2r-2$）的F分布$1-\alpha$ 水平分位点的表达式。

当固定参数 λ 时，满足不等式（5.25）的概率随 μ 的增加而减小。由于这一性质，可用下列方式给出准则。若满足不等式（5.25），则接受假设H（μ_0）；否则，则接受竞争假设 $H^+(\mu_0)$。这种准则是无偏准则，其范围（4.16）不大于α。然而必须指出，当 λ 减小时，犯第二类错误的概率增加（功效减小），因为这时任意假设 $\mu=\mu_1$都"接近"假设 $\mu=\mu_0$。于是，使选择合适的方案参数N和 r 复杂化了。

在处理实际试验数据时，关于（4.4）式（$\mu=0$）分布参数 λ 或均值 $\theta=1/\lambda$的假设检验是按照给定准则进行的。在这些准则中，给出了各种方案集，从而保证在检验假设$H_0^-=\{\lambda\leqslant\lambda_0\}$和$H_1^+=\{\lambda=\lambda_1\}$，$\lambda_1>\lambda_0$时，犯第一类错误的概率不大于$\alpha$、犯第二类错误的概率不大于 β。

产品平均无故障工作时间服从（4.4）式（$\mu=0$）的分布的假设检验标准，是由美国颁布的（见参考文献[205]），有关标准的特殊问题，在参考文献[173，196]中作了分析。在此标准中，方案的选择由比值λ_1/λ_0、和犯错误概率 α 和 β 决定。序贯方案的特点是数列 t_{B1}，$t_{B2}<t_{B3}$，…，$t_{H1}<t_{B2}$，…，t_{HBk}。若到t_{B0}时刻之前没有出现故障，则停止试验，并接受假设H_0^-。若在时刻$t_{(1)}<t_{B0}$出现故障，则在$t_{(1)}\leqslant t_{H1}$时停止试验并拒绝H_0。若$t_{(1)}>t_{H1}$，则无故障试验继续到t_{B1}，在此之后接受H_0。若$t_{(2)}<t_{B1}$，则在$t_{(2)}\leqslant t_{H2}$时拒绝假设H_0。若$t_{(2)}>t_{H2}$，则无故障试验继续到t_{B2}时刻，此后接受H_0。当第三次故障时刻 $t_{(3)}$，在t_{B2}之前时，将$t_{(3)}$同t_{H3}和t_{B3}等数作类似的比较。最后，若在第 k 次故障时刻 $t_{(k)}$前试验仍未结束，则当 $t_{(k)}\leqslant t_{HBk}$时拒绝假设H_0。若在 t_{HBk}时刻前未出现第 k 次故障，则接受假设 H_0。选择$\{t_{Hi}, t_{Bi}, t_{HBk}\}$时，需在给定 λ_1/λ_0时，保证犯第一和第二类错误的概率在规定的极限值内。

参数的点估计和置信估计 可用各种方法获得点估计。若利用极大似然法，则根据符合

具体试验方案的似然函数获得估计。对于[N,Б,r]方案和(4.1)式($\mu=0$)分布函数，似然函数由(5.8)式决定，当$r>1$时，λ的极大似然估计等于$r/S_Б(t_{(r)})$，且具有有限均值。若用这一估计乘以$(r-1)/r$，位移就容易消除。最后获得无偏估计

$$\hat{\lambda}=(r-1)/S_Б(t_{(r)}). \tag{5.26}$$

当$r>2$时，估计(5.26)式的方差是有限的，且等于$\lambda^2/(r-2)$。对于[N,B,r]方案，无偏估计$\hat{\lambda}=(r-1)/(Nt_{(r)})$。

若按[N,B,T]方案进行试验，即用相同的新产品替换故障产品，则λ的极大似然估计是无偏估计

$$\hat{\lambda}=d(T)/(NT). \tag{5.27}$$

而其方差等于$\lambda/(NT)$。

当按[N,B,(r,T)]方案试验时，参数λ的无偏估计为

$$\hat{\lambda}=\begin{cases}d(T)/(NT), & t_{(r)}>T;\\(r-1)/(Nt_{(r)}), & t_{(r)}\leqslant T.\end{cases} \tag{5.28}$$

可以看出，公式(5.28)就是[N,B,T]方案同[N,B,r]方案相结合对λ的估计。在参考文献[44]中表明，对于许多方案，其中也包括[N,B,(r,T)]方案，这种相结合的估计是正确的。当参数真值等于λ时，(5.28)式中$\hat{\lambda}$的方差为

$$D(\hat{\lambda})=\frac{\lambda}{NT}L_{r-2}(\lambda NT)+\frac{\lambda^2}{r-2}(1-L_{r-1}(\lambda NT)).$$

对于[N,Б,T]方案，求λ的无偏估计比较复杂。从(5.10)式中不难获得极大似然估计

$$\hat{\lambda}=d(T)/S_Б(T). \tag{5.29}$$

这是有偏估计。若在T内故障概率不太大($\lambda T<0.1$)，而N较大和故障总数$d(T)$很大时，则可利用较简单的估计来代替(5.29)式

$$\hat{\lambda}=d(T)/\{[N-d(T)/2]T\}. \tag{5.30}$$

在上述条件下，(5.29)和(5.30)式的估计彼此接近。由于向量$(d(T),S_Б(T))$是充分统计量，而使对于[N,Б,T]方案的λ无偏估计的公式复杂化。若按[N,Б,T]方案受试的产品在T内的故障概率小，即λT小($\lambda T<0.1$)，则在区间[0,T]中，故障时间的条件概率密度$\lambda e^{-\lambda t}/(1-e^{-\lambda T})$接近于均匀分布密度。$\lambda$很小的值域对于应用来说是极为重要的。然而，当试验时间T也是受试产品的主要部件发生故障的时间T时，统计量$S_Б(T)$的计算可能是重要的。

取关于充分统计量$(d(T),S_Б(T))$的简化无偏估计平均值，可作为[N,Б,T]方案的基础，当按此方案进行试验时，便可得到λ估计的途径。假定给出某数$S_0\leqslant NT$，并指出时刻τ，即在此τ时，或者总工作时间达到S_0($S_Б(\tau)=S_0$)，或者所有受试产品($\tau=t_{(N)}$，$S_Б(t_{(N)})<S_0$)发生故障。因此，如果仅在时刻τ前研究产品试验，则试验结果符合[N,Б,HS_0]方案(见§4·1)。若用$S_Б(t)/N$代替t作为时间参数，则发生故障的时刻构成了参数为$N\lambda$的泊松过程。由此得出，[N,Б,HS_0]方案同[N,B,(N,S_0)]方案对等，且可将$r=N$,$T=S_0/N$

代入公式（5.28），利用公式构成参数 λ 的无偏估计。最后，得到

$$\hat{\lambda}=\begin{cases}d(\tau)/S_0, & \text{若} S_Б(t_{(N)})>S_0, S_Б(\tau)=S_0; \\ (N-1)/S_Б(t_{(N)}), & \text{若} \tau=t_{(N)}.\end{cases} \quad (5.31)$$

是按[N,Б,T]方案进行试验时参数 λ 的无偏估计。取条件数学期望值 $M(\hat{\lambda}\mid d(T),S_Б(T))$ 来求（5.31）式的均值。最后，可获得充分统计量函数的无偏估计。

在应用中，不仅需要估计 λ，而且需要估计某些函数 $g(\lambda)$。对 $R(T_3)=\exp\{-\lambda T_3\}$ 的估计问题——估计在 t_3 时的无故障概率就是例子。用最简单的方法获得对于[N,Б,T]方案的无偏估计

$$\hat{R}(T_3)=(N-d(T))/N. \quad (5.32)$$

显然，估计（5.32）式是充分统计量的函数，准确地说，是 $d(T)$——充分统计量的一个分量的函数。

根据[N,Б,r]方案的试验数据计算无偏估计 $R(T_3)$ 稍微复杂些。由于（5.3）式的随机变量服从指数分布，则 $d(r)/r$ 将是 $R(T_3)$ 的无偏估计，其中 $d(r)$ 等于较大 T_3 的数 s_k。这个无偏估计不是充分统计量函数。用条件数学期望 $M\left\{\frac{d(r)}{r}\middle|S_Б(t_{(r)})\right\}$ 可得到较准确的无偏估计

$$\hat{R}(T_3)=\begin{cases}[1-T_3/S_Б(t_{(r)})]^{r-1}, & \text{若} S_Б(t_{(r)})>T_3; \\ 0, & \text{若} S_Б(t_{(r)})\le T_3.\end{cases} \quad (5.33)$$

早在1962年奥德诺罗博夫（Е·М·Одлоробовой）就提出了这一估计[168,211]。

当试验中故障数不大时，置信估计是关于参数 λ 的统计推断的最佳形式。对于应用来说，无论是双边置信估计，还是单边置信估计都值得注意。知道参数 λ 的置信上限估计，对许多问题的解决都是重要的。

当按[N,Б,r]方案试验时，可获得最简单的 λ 置信估计。上面已经指出，$2\lambda S_Б(t_{(r)})$ 服从具有 $2r$ 自由度的 χ^2 分布。由此得出

$$P_\lambda\{\chi^2_{\varepsilon_1}(2r)\le 2\lambda S_Б(t_{(r)})\le\chi^2_{1-\varepsilon_2}(2r)\}$$

$$=P_\lambda\left\{\frac{\chi^2_{\varepsilon_1}(2r)}{2S_Б(t_{(r)})}\le\lambda\le\frac{\chi^2_{1-\varepsilon_2}(2r)}{2S_Б(t_{(r)})}\right\}=1-(\varepsilon_1+\varepsilon_2). \quad (5.34)$$

从（5.34）式中推出，$\chi^2_\gamma(2r)/2S_Б(t_{(r)})$ 是 λ 的 γ 置信上限估计。

$p=R(T)=e^{-\lambda T}$ 的置信限和[N,Б,T]方案的制定详见第六章。这里仅指出，概率 $p=e^{-\lambda T}$ 的 γ 置信下限估计 p_* 给出了 γ 置信上限估计 $\lambda^*=-(\ln p_*)/T$。对于各种试验方案的参数 λ 置信估计问题，在参考文献[44]中都进行了详细的论述。

设无故障工作时间分布函数为（4.4）式的形式。用最简便的方法求出对于[N,Б,r]和[N,Б,T]方案的 μ 和 λ，或者 μ，$\theta=\lambda^{-1}$ 的极大似然估计。从（5.22）式可得出

$$\mu=X_{(1)},\quad \theta=S_Б(t_{(1)},\ldots,t_{(r)})/r.$$

这些估计是有偏估计。根据这些估计很容易求出无偏估计

$$\hat{\mu}=X_{(1)}-\frac{S_Б(t_{(1)},\ldots,t_{(r)})}{N(r-1)};\quad \hat{\theta}=\frac{S_Б(t_{(1)},\ldots,t_{(r)})}{(r-1)}.$$

这些估计的方差和协方差为

$$D(\hat{\theta})=\frac{1}{\lambda^2(r-1)},\quad D(\hat{\mu})=\frac{r}{\lambda^2N^2(r-1)};\quad \operatorname{cov}(\hat{\theta},\hat{\mu})=-\frac{1}{\lambda^2N(r-1)}.$$

(这些关系式的推导请参阅参考文献[202]的175页。)

本节仅对(4.4)和(4.5)式指数分布参数的某些最典型统计推断结果作简要的叙述。

在参考文献[181—184]中，爱因斯坦和索别利对这些问题进行了系统的研究。在参考文献[44]中，对许多组方案进行了研究。在参考文献[202]中，对指数分布参数的统计推断也进行了非常详细的研究，但主要是对$[N,B,r]$和$[N,B,T]$方案的研究。

§5·2 老化部件分布函数分位点的置信估计

威布尔-格涅钦科分布的参数和分位点估计 首先来研究获得威布尔-格涅钦科分布族估计的特殊问题。但是，本节研究的重点是老化分布函数和平均老化分布函数分位点的估计。设分布属于两参数威布尔-格涅钦科分布族，而按$[N,B,r]$方案进行可靠性试验，最后获得故障时刻为$t_{(1)},\cdots,t_{(r)}$。这时，似然函数为

$$L(\sigma,\rho;t_{(1)},\cdots,t_{(r)})$$

$$=\frac{N!}{(N-r)!}\prod_{i=1}^{r}\left\{\frac{\rho}{\sigma}\left(\frac{t_{(i)}}{\sigma}\right)^{\rho-1}\exp\left[-\left(\frac{t_{(i)}}{\sigma}\right)^{\rho}\right]\right\}\exp\left[-(N-r)\left(\frac{t_{(r)}}{\sigma}\right)^{\rho}\right]. \tag{5.35}$$

上式对σ和ρ取偏导数后，便得出两个非线性方程

$$\left[\sum_{i=1}^{r}t_{(i)}^{\rho}\ln t_{(i)}+(N-r)t_{(r)}^{\rho}\ln t_{(r)}\right]S_{\rho,r}^{-1}-\rho^{-1}=\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}\ln t_{(i)}; \tag{5.36}$$

$$\sigma^{\rho}=S_{\rho,r}. \tag{5.37}$$

式中

$$S_{\rho,r}=\frac{1}{r}\left[\sum_{i=1}^{r}t_{(i)}^{\rho}+(N-r)t_{(r)}^{\rho}\right]. \tag{5.38}$$

首先，从方程(5.36)中求出极大似然估计$\hat{\rho}$；然后，把$\hat{\rho}$代入(5.38)式，求出$S_{\hat{\rho},r}$，再将$S_{\hat{\rho},r}$代入(5.37)式便求出$\hat{\sigma}$。由于方程(5.36)、(5.37)是非线性的，则用牛顿-拉夫松逐渐近似法解之。(关于威布尔-格涅钦科分布函数参数估计方面的目录索引，见参考文献[202]。)

获得估计的另一方法是将(4.5)式的分布二参数族变为(4.7)式的指数分布的两参数族。为此，必须用$x_{(i)}=-\ln t_{(i)}$ $(i=1,\cdots,r)$代替$t_{(1)},\cdots,t_{(r)}$。在用线性统计量估计(4.7)式的参数时，可用§4·3的方法(见(4.45)、(4.46)式)。这时，必须把$F_0(x)=1-\exp(e^{-x})$代入(4.40)、(4.41)式。

在可靠性理论中，研究了原假设H_0：两参数威布尔-格涅钦科分布族(4.5)式($\alpha=0$)，和竞争假设H_1：三参数威布尔-格涅钦科分布族的假设检验方法。下列设想可作为准则的基础。须知，经$x_{(i)}=-\ln t_{(i)}$变换后，假设H_0属于(4.7)分布族。在参考文献[213]中提出，区间长度$x_{(i+1)}-x_{(i)}$，$i=1,\cdots,r$几乎是相互独立的，并近似服从指数分布，而正态随机变量$2(x_{(i+1)}-x_{(i)})/M[x_{(i+1)}-x_{(i)}]$近似服从自由度为2的$\chi^2$分布。由于$z_i=f(x_{(i)},$

$\ln\lambda$)，σ 和 ρ 是独立的两参数，所以对于[N,B,r]方案，要计算$Mz_{(i)}$值（对于$N=3(1)16$和所有的 $i\leqslant N$），在参考文献[202]中引用了$Mz_{(i)}$($Mz_{(1)}$，…，$Mz_{(N-1)}$)。最后，为检验假设H_0，可利用下式作为检验统计量。

$$T=\sum_{i=k+1}^{r-1} l_i \Big/ \sum_{i=1}^{k} l_i,\quad l_i=\frac{x_{(i+1)}-x_{(i)}}{Mz_{(i+1)}-Mz_{(i)}}\ .$$

在假设H_0条件下，统计量分布中没有参数λ和ρ，并近似自由度为$(2(r-k-1),2k)$的F分布，随着μ的增加，在向假设H_1变化的过程中T减少。令$F_\alpha(m,n)$——自由度为(m,n)的F分布的α水平分位点。若$T<F_\alpha(2(r-k-1),2k)$，则拒绝假设H_0；若$T\geqslant F_\alpha(2(r-k-1),2k)$，则接受$H_0$。该种准则是无偏准则，其水平近似于$\alpha$。由于统计量$T$对参数$\mu$是单调的，$x_{(i)}=\ln(t_{(i)}-\mu)$]，因此就可能构成（4.5）式参数$\mu$的$\gamma$置信下限估计。在参考文献[201]中提出了此方法。

若必须研究威布尔-格涅钦科三参数族后才能获得数据，则利用极大似然法来估计参数；但是，在解类似于（5.36）和（5.37）式的方程时，会出现更加复杂的情况（见参考文献[200]）。

常常用联合方法进行参数估计。例如，首先，设法用某种方法估计参数μ；然后，设参数μ为已知，用极大似然法解关于σ，ρ的方程（5.36），（5.37），在方程中以$t_{(i)}$代替$t_{(i)}-\hat{\mu}$。若$\sigma=\rho=1$，则不难证明

$$\hat{\mu}=t_{(1)}-(r-1)^{-1}[S(t_{(r)})/N-t_{(1)}] \tag{5.39}$$

是参数μ的无偏点估计，式中$S(t_{(r)})$——第r次故障时刻前的总工作时间。$\hat{\mu}$与ρ的大小无关，当N很大时，从（5.39）式的$t_{(1)}>\mu$中扣除的修正量很小。这样，由公式（5.39）求出$\hat{\mu}$，然后解方程（5.36），（5.37），在公式中以$t_{(i)}-\hat{\mu}$代替$t_{(i)}$。

如上所述，对于$F(t)$的各种水平分位点p的估计问题，在应用中引起了人们的注意。对于（4.5）式的分布族，水平分位点p很容易用参数表示为

$$x_p=\mu+\nu A_p^{1/\rho},\quad \nu=1/\lambda,\quad A_p=\ln(1-p)^{-1}\ . \tag{5.40}$$

若研究（4.7）式分布族，则

$$\ln x_p=\delta+\sigma\ln A_p. \tag{5.41}$$

因为（5.41）式是参数δ，σ的线性函数，于是得到线性估计$\ln x_p$。这时，为确定最小方差的线性估计$\ln x_p$，必须在（4.5）式的适当约束条件下，解二次型（4.46）式的条件极小值。根据公式

$$\hat{x}_p=\hat{\mu}+\hat{\nu} A_p^{1/\hat{\rho}} \tag{5.42}$$

和（5.40）求出对于（4.5）式的三参数族的分位点估计。然而必须指出，当N不大时，估计（5.42）实质上是有偏估计，尤其是其值可能明显地大于被估计值x_p。

当N不大（$N<100$）时，可适当地利用γ置信下限估计x_p来代替（5.42）式的点估计。获得这种估计的方法之一是：首先，用由（5.42）式决定的估计$\hat{x}_p$作为基本估计。对于一组给定的参数$\theta=(\mu,\nu,\rho)$，确定$\hat{x}_p$，——对于估计量$\hat{x}_p$分布的γ水平分位点。然后，求出修正值$k(\theta)=\hat{x}_p-x_p$，并用表格表示之。目前，计算x_p的γ置信下限估计步骤就是这样。先求出估计$\hat{\mu}$，$\hat{\nu}$，$\hat{\rho}$，而后按此估计用公式（5.42）求出分位点x_p的估计$\hat{x}_p$，减少

估计$\hat{x}_p$的修正值，由包括参数估计值的修正表给出。

获得修正表的最简便的方法是统计模拟法。对于每一组（μ,ν,ρ），对$[N,Б,r]$方案的试验结果模拟M次：$t_{(1)i},\cdots,t_{(r)i}$，计算M个估计值$\hat{x}_{p,i}$（$i=1,\cdots,M$），并求得分位点的估计$\hat{x}_{p,\gamma}=\hat{x}_{p,([M\gamma])}$，此估计在有序估计序列$\hat{x}_{p,(1)}\leqslant\cdots\leqslant\hat{x}_{p,(M)}$中等于$[M\gamma]$。应当注意，$\mu-[N/(N-1)][(r-1)/r]\hat{\mu}$之差（式中$\hat{\mu}$由（5.39）式决定）与参数$\mu$无关。因此，可以获得固定$\mu=\mu_0$的修正表，只有$\nu$和$\rho$是此表的输入参数。

表5.1中列出了用统计模拟法获得的$[N=20,Б,r=8]$方案和$\gamma=0.9$的修正值。利用方程（5.36），（5.37），（5.39）和（5.42）来求得估计。

表 5.1

ρ \ ν	200	240	280	320	360	400
0.6	21.6	25.[illegible]	29.8	33.8	37.0	41.9
1.0	33.0	39.3	45.5	51.2	57.6	63.6
1.4	36.0	42.8	49.5	56.3	6[illegible].1	69.8
1.8	35.[illegible]	42.6	49.5	56.5	63.4	70.4
2.2	34.8	4[illegible].5	48.0	54.4	61.7	67.7
2.6	32.8	39.3	45.7	52.2	58.6	65.0

假设按公式（5.42）计算出$\hat{x}_{0.1}=155.5$，而参数的估计为$\hat{\nu}=250$，$\hat{\rho}=1.1$。从表中的$\rho=1$，$\rho=1.4$，$\nu=240$，$\nu=280$这四个最接近的修正值中，选出最大值等于49.5。计算出$x_p(p=0.1,\gamma=0.9)$的分位点γ置信下限估计为$\hat{x}_{p,\gamma}=155.5-49.5=100$。

必须指出，上述修正方法是近似法。因为：（1）可能原分布函数不属于三参数威布尔-格涅钦科分布；（2）统计模拟法仅给出了近似修正值；（3）修正表是在输入参数值ν和ρ等于准确值的条件下计算的，而利用此表取得估计$\hat{\nu}$和$\hat{\rho}$。个别实例表明，在修正计算基础上获得x_p的γ置信下限的方法，能求出对于威布尔-格涅钦科分布之x_p的近似γ置信下限估计。

老化分布函数分位点的下限估计 假设无故障工作时间分布$F(t)$——是老化分布函数。正如在§4·2中所表明的，这种函数的特点：其寿命函数$\Lambda(t)=-\ln\bar{F}(t)$是时间$t$的下凸函数。假设$F(t)$是$t$的连续函数。令$t_{(1)}\leqslant t_{(2)}\leqslant\cdots\leqslant t_{(\nu)}$——受试产品发生故障时刻。对于某些试验方案，故障数ν可以是随机变量。设A——按此故障时刻来确定其是否发生的事件。当数据的生成分布函数是$F(t)$时，用$P_F(A)$表示事件A发生的概率。问题是要找到统计量$f_\gamma=f_\gamma(t_{(1)},t_{(2)},\cdots,t_{(\nu)})$，对于这些统计量，对任意老化分布$F(t)$，

$$P_F\{f_\gamma\leqslant x_p\}\geqslant\gamma. \tag{5.43}$$

从顺序统计理论中（参阅参考文献[68]）得知

$$P_F\{t_{(k)}\leqslant x_p\}=I_p(k,N-k+1). \tag{5.44}$$

式中

$$I_p(a,b)=\frac{1}{B(a,b)}\int_0^p x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx$$

—— 不完全 B 函数，

$$B(a,b)=\Gamma(a)\Gamma(b)/\Gamma(a+b).$$

对于任意连续分布 $F(t)$，而不一定是老化分布，关系式（5.44）都是正确的。从（5.44）式中得出，若利用 $[N,B,r]$ 方案和 $k\leq r$，可将 $f_r=t_{(k)}$ 代入（5.43）式。这时，置信度 $\gamma=I_p(k,N-k+1)$。对于少数、老化分布，需求出适合 $I_k(1,N)<\gamma$ 条件的 γ 置信下限估计。这一条件正是对于小 p 的典型条件。特别是，为按 $[N,B,r]$ 方案进行试验，在任意 p 的条件下，可取统计量

$$T_*=\min[2\Lambda_p/\chi^2_\gamma(2r),1/N]S(t_{(r)})\qquad(5.45)$$

作为 x_p 的 γ 置信下限。式中 $S(t_{(r)})$ —— 由（4.2）式确定的总工作时间。对于较广泛的试验方案，用以下方法可以直接获得类似（5.45）式的估计。例如，在第 k 次故障发生时刻 $t_{(k)}$，按照早已给定的数列 $\{n_k\}$，将还未发生故障的产品 n_k 从试验中取出。

现在来研究线性统计量

$$T=a_{1,r}t_{(1)}+a_{2,r}[t_{(2)}-t_{(1)}]+\cdots+a_{r,r}[t_{(r)}-t_{(r-1)}].\qquad(5.46)$$

若 $a_{1,r}\geq a_{2,r}\geq\cdots\geq a_{r,r}\geq0$，则称（5.46）式的统计量为严格正统计量。须注意，对于这些统计量，

$$T=(a_{1,r}-a_{2,r})t_{(1)}+\cdots+(a_{r-1,r}-a_{r,r})t_{(r-1)}+a_{r,r}t_{(r)}\qquad(5.47)$$

分布是正确的。式中所有的差 $a_{k,r}-a_{k+1,r}\geq0$，$a_{r,r}\geq0$。寿命函数 $\Lambda(t)=-\ln\bar F(t)$ 是下凸的。所以函数 $\Lambda(t)$ 过点 $(x_p,\Lambda(x_p))$ 的切线开在函数曲线之下（图5.4）。切线方程：

$$l_p(t)=\Lambda_p+\lambda_p(t-x_p).$$

式中　$\Lambda_p=\Lambda(x_p)=\ln(1-p)^{-1}$；

$\lambda_p=[d\Lambda(t)/dt]_{t=x_p}$。

函数 $\Lambda_p(t)=\max[0,l_p(t)]$ 也是下凸的，并因此而决定了老化函数

$$F_p(t)=\begin{cases}0,\ t<\mu_p=x_p-\Lambda_p/\lambda_p;\\ 1-\exp\{-\lambda_p(t-\mu_p)\},\ t\geq\mu_p.\end{cases}\qquad(5.48)$$

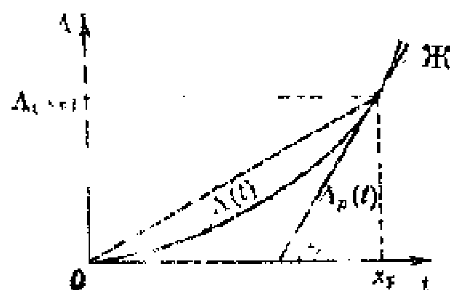


图5.4

由于 $\Lambda_p(t)\leq\Lambda(t)$，则对于所有 $t\geq0$，求得的函数 $u=u_p(t)\leq t$ 中，$\Lambda(t)=\Lambda_p(u_p(t))$。这样一来，通过函数 $u_p(t)$ 正半直线映射，把老化分布函数变成参数为 $\lambda_p>0$，和绝对保障无故障工作时间为 $\mu_p>0$ 的指数函数。这时，满足等式 $F(x_p)=F_p(x_p)=p$，即这些分布的水平 p 分位点是相同的。对于严格正统计量（5.46）式，令 $u_{(k)}=u_p(t_{(k)})$，便得到

$$T\leq T_u=(a_{1,r}-a_{2,r})u_{(1)}+\cdots+(a_{r-1,r}-a_{r,r})u_{(r-1)}+a_{r,r}u_{(r)}=a_{1,r}u_{(1)}$$
$$+a_{2,r}(u_{(2)}-u_{(1)})+\cdots+a_{r,r}(u_{(r)}-u_{(r-1)}).\qquad(5.49)$$

现在，根据统计量

$$\min(a_{1,r}^{-1},1)T\qquad(5.50)$$

来研究 x_p 的 γ 置信下限估计的构成方法。式中 T —— 由（5.46）或（5.47）式决定的严格正充分统计量。由（5.49）式得出，对于任意老化分布 $F(t)$，

$$P_F\{\min(a_{1,r}^{-1},1)T\leq x_p\}\geq P_F\{\min(a_{1,r}^{-1},1)T_u\leq x_p\}=P_{F_p}\{\min(a_{1,r}^{-1},1)T_u\leq x_p\}.$$
$$(5.51)$$

由关系式（5.49）和（5.51）推断，在$F(t)=F_{\theta}(t)$、即由（5.48）式所决定的条件下，可将随机变量 $u_{i,\nu}=\alpha_{\theta}(t_{(i)})$ 看作是顺序故障时刻。对于很多方案，若所研究的随机变量$w_{1,\nu}=N\lambda_{p}(u_{(1)}-\mu_{p}),\cdots,w_{\nu,\nu}=(N-n_1-n_2-\cdots-n_{\nu-1}-\nu+1)\lambda_{p}(u_{(\nu)}-u_{(\nu-1)})$服从具有参数$\mu_{p},\lambda_{p}$的分布，则计算就简单化了。

于是由凸性$\Lambda(t)$（见图5.4）得出$\lambda_{p}\leqslant\Lambda_{p}/x_{p}$，且考虑到不等式$[1-\min(a_{1,\nu},1)]\geqslant0$时，便得到

$$\lambda_{p}x_{p}[1-\min(a_{1,\nu},1)]+\min(a_{1,\nu},1)\Lambda_{p}\leqslant\Lambda_{p}=\ln(1-p)^{-1}. \tag{5.52}$$

根据（5.51）和（5.52）式，可得到

$$P_{F_{\theta}}\Big\{\min(a_{1,\nu},1)\Big[\frac{a_{1,\nu}}{N}N\lambda_{p}(u_{(1)}-\mu_{p})+\cdots+\frac{a_{\nu,\nu}}{N-n_1-\cdots-n_{\nu}-\nu+1}(N-n_1-\cdots-n_{\nu}-\nu+1)\lambda_{p}(u_{(\nu)}-u_{(\nu-1)})\Big]\leqslant\lambda_{p}x_{p}\min(a_{1,\nu},1)\Big\}\ldots\lambda_{p}x_{p}[1-\min(a_{1,\nu},1)]+\min(a_{1,\nu},1)\Lambda_{p}\Big\}\geqslant P_{F_{\theta}}\Big\{\min(a_{1,\nu},1)\Big[\frac{a_{1,\nu}}{N}w_{1,\nu}+\cdots+\frac{a_{\nu,\nu}}{N-n_1-\cdots-n_{\nu}-\nu+1}w_{\nu,\nu}\Big]\leqslant\ln\frac{1}{1-p}\Big\}. \tag{5.53}$$

从不等式（5.51）和（5.53）中得出，若满足条件

$$P_{F_{\theta}}\Big\{\min(a_{1,\nu},1)\Big[\frac{a_{1,\nu}}{N}w_{1,\nu}+\cdots+\frac{a_{\nu,\nu}}{N-n_1-\cdots-n_{\nu}-\nu+1}w_{\nu,\nu}\Big]\leqslant\ln\frac{1}{1-p}\Big\}\geqslant\gamma, \tag{5.54}$$

则线性严格正统计量（5.50）是γ置信下限估计。当随机向量$w_{1,\nu},\cdots,w_{\nu,\nu}$服从具有参数$\mu_{p}$和$\lambda_{p}$的分布时，就不难检验条件（5.54）式。对于大多数试验方案也都是如此。下面举例证实这一点。

设按$[N,\text{Б},r]$方案进行试验，而$t_{(1)},\cdots,t_{(r)}$为故障时刻。对于参数为λ的指数分布，用与（4.2）式决定的总工作时间$S(t_{(r)})$成比例的统计量，可准确地估计出均值$1/\lambda$，或分位点$x_{p}=\Lambda_{p}/\lambda$。统计量$cS(t_{(r)})$是严格正统计量，对于此统计量，在所有$c>0$时，$a_{1,r}=cN,a_{2,r}=c(N-1),\cdots,a_{r,r}=c(N-r+1)$，条件（5.54）式采用以下形式

$$P_{F_{\theta}}\{\min(Nc,1)c(w_{1,r}+\cdots+w_{r,r})\leqslant\Lambda_{p}\}\geqslant\gamma. \tag{5.55}$$

随机变量$w_{k,r}$是相互独立的和$P\{w_{k,r}>x\}=e^{-x}$。因此$2[w_{1,r}+\cdots+w_{r,r}]$服从具有$2r$自由度的$\chi^2$分布，满足（5.55）式的最大值$c=c_{r}$由以下条件决定

$$P\{c_{r}(w_{1,r}+\cdots+w_{r,r})\leqslant\Lambda_{p}\}=P\{2(w_{1,r}+\cdots+w_{r,r})\leqslant2\Lambda_{p}/c_{r}=\chi^2_{\gamma}(2r)\}=\gamma.$$

式中$\chi^2_{\gamma}(2r)$——具有$2r$自由度的χ^2分布分位点。由此可得$c_{r}=2\Lambda_{p}/\chi^2_{\gamma}(2r)$。这样，按照（5.50）式，统计量（5.45）是$x_{p}$的$\gamma$置信下限估计。

在估计具有（4.4）式位置参数的指数分布族分位点时，最好利用统计量

$$T_2=ct_{(1)}+ck_{1}S(t_{(1)},t_{(r)}), \tag{5.56}$$

式中c——给定正数，$0<c\leqslant1$；$S(t_{(1)},t_{(r)})=(N-1)(t_{(2)}-t_{(1)})+\cdots+(N-r+1)(t_{(r)}-t_{(r-1)})$——从第一次到第$r$次故障的总工作时间。统计量$T_2$的系数$a_{i,r}$分别等于

$a_{1,r}=c, a_{l,r}=(N-l+1)ck_p, l=2,\cdots,r$。于是，若满足不等式

$$1-(N-1)k_p\geqslant 0, \quad k_p\geqslant 0. \tag{5.57}$$

统计量T_2便是严格正统计量。若满足了（5.57）式，则根据（5.54）式，对于最大可能值k_p来说，方程变为以下形式

$$P_{F_p}\{w_{1,r}c/N+ck_p(w_{2,r}+\cdots+w_{r,r})\leqslant \ln(1-p)^{-1}\}\geqslant\gamma. \tag{5.58}$$

现在最主要的是求得最大可能值k_p，因为这时统计量T_2可对x_p进行最好地估计。必须说明，在什么条件下方程（5.58）的解能满足不等式（5.57）。以下条件使k_p满足（5.58）式

$$P_{F_p}\{w_{1,r}\leqslant \mathrm{M}\}=1-\exp\{-\mathrm{M}\}=1-(1-p)^{N/c}>\gamma, \quad \mathrm{M}=Nc^{-1}\Lambda_p.$$

若

$$N/c>\ln(1-\gamma)/\ln(1-p), \tag{5.59}$$

就满足此条件。概率密度$w_{1,r}+Nk_p(w_{2,r}+\cdots+w_{r,r})$等于概率密度$e^{-x}$和$[x^{r-2}/[(Nk_p)^{r-1}(r-2)!]]\exp\{-x/Nk_p\}$的卷积。因此，方程(5.58)可变为

$$\int_0^M\left\{\int_0^x e^{-(x-y)}\frac{y^{r-2}}{(Nk_p)^{r-1}(r-2)!}\exp\left\{-\frac{y}{Nk_p}\right\}dy\right\}dx$$

$$=\sum_{d=r-1}^{\infty}Nk_p(1-Nk_p)^{d-r+1}\left[1-\mathrm{L}_d\left(\frac{M}{k_p}\right)\right]$$

$$=\left[1-\mathrm{L}_{r-1}\left(\frac{M}{Nk_p}\right)\right]-e^{-M}(1-Nk_p)^{-(r-1)}\left[1-\mathrm{L}_{r-1}\left(\frac{1-Nk_p}{Nk_p}M\right)\right]=\gamma. \tag{5.60}$$

式中L_d由公式（4.14）决定，$\mathrm{M}=Nc^{-1}\Lambda_p$。

类似（5.60）式的推导，还有

$$P_{F_p}\{w_{1,r}+x(w_{2,r}+\cdots+w_{r,r})\leqslant \mathrm{M}\}=\sum_{d=r-1}^{\infty}x(1-x)^{d-(r-1)}[1-L_d(\mathrm{M}x^{-1})]. \tag{5.61}$$

于是，（5.61）的右端是递减函数，其值在$x=1$时等于$1-\mathrm{L}_{r-1}(M)$。由此得出，当满足不等式$1-\mathrm{L}_{r-1}(\mathrm{M})<\gamma$，或与其等价的不等式

$$N/c<\chi^2_\gamma(2r)/(2\Lambda_p) \tag{5.62}$$

时，求得k_p值作为方程（5.60）的解，这时$Nk_p>1$。

若 $$N/c\geqslant\chi^2_\gamma(2r)/(2\Lambda_p),$$

则$Nk_p=1/N$。须注意，当任意$\widetilde{k}_p$不大于$1/N$时，且满足不等式

$$\sum_{d=r-1}^{\infty}N\widetilde{k}_p(1-N\widetilde{k}_p)^{d-(r-1)}[1-L_d(\Lambda_p)/(\widetilde{k}_pc)]\geqslant\gamma.$$

则取该$\widetilde{k}_p$作为k_p。

统计量（5.45）和（5.56）的有效性，可用其比值T_2/T_1来判断。假设N满足不等式

$$\ln(1-\gamma)/\ln(1-p)<N/c<\chi^2_\gamma(2r)/(2\Lambda_p). \tag{5.63}$$

这时，满足不等式（5.59）和（5.62），亦即不论是不等式（5.57），还是统计量（5.56），都是所求的。根据（5.45）式可记作

$$T_1=\frac{2\Lambda_pN}{\chi^2_\gamma(2r)}\left[\frac{Nt_{1,r}+S(t_{1,r},\cdots,t_{r,r})}{N}\right].$$

由此可见，当满足（5.63）式时，

$$\frac{T_2}{T_1}>1, 若 \frac{Nt_{(1)}}{S(t_{(1)},t_{(r)})}>\frac{A-Nk_r}{1-A},\ A=\frac{2NA_r}{c\chi_\gamma^2(2r)}.$$

当首次故障前的总工作时间占全部总工作时间的绝大部分时，将满足最后一个不等式。这种情况可能在产品试验时出现，试验结果的分布函数具有绝对保证无故障工作时间 $t_0>0$，对于时间 $t_0, F(t_0)=0$。在这种情况下，估计量 T_2 可以更好地估计出分位点 x_p。对于 $N/c\geqslant \chi_\gamma^2(2r)/(2A_r)$ 来说，$T_2/T_1=1$，即二者相同。

现在来研究按 $[N,Б,T^{(1)}]$ 方案试验（即对 N 个产品做无更换试验，在规定的时间 T 之后发生第一次故障时结束）时，x_p 的 γ 置信下限估计的构成问题。令 ν ——在试验中出现的总故障数，而发生故障的时刻为 $t_{(1)}\leqslant\cdots\leqslant t_{(\nu)}$，$\nu\geqslant 1$。为了简便起见，现仅讨论与总工作时间成比例的形式为 $T_3=\min(c,1/N)S(t_{(\nu)})$ 的线性严格正统计量。类似（5.55）式的推导，先选出满足不等式

$$P(c)=P_{F_p}\{\min(1/N,c)(w_{1,\nu}+\cdots+w_{\nu,\nu})\leqslant A_p\}\geqslant\gamma \tag{5.64}$$

的最大数作为 c。随机变量 ν 的分布取决于参数 $\kappa=N\lambda(T-\mu)$，因此使由（5.64）式求 c 复杂化了。所以，应从条件 $\inf\limits_{\kappa>0} P(c)\geqslant\gamma$ 中求 c。也可以引用非常简单，但不太有效的 x_p 的 γ 置信下限估计。为此，在按 $[N,Б,T^{(1)}]$ 方案试验前，要选择整数 $r, 1\leqslant r\leqslant N$。现研究线性严格正统计量（5.46）。若 $\nu\leqslant r$，则该统计量 $a_{k,\nu}/(N-k+1)=c$；若 $\nu>r$，则 $a_{k,\nu}=0$。这时，从（5.54）式中可得到不等式

$$P_{F_p}\{\min(1/N,c)(w_{1,\nu}+\cdots+w_{\min(\nu,r),\nu})\leqslant A_p\}\geqslant\gamma; \tag{5.65}$$

其次，再利用不等式：

$$P_{F_p}\{\min(1/N,c)(w_{1,\nu}+\cdots+w_{\min(\nu,r),\nu})\leqslant A_p\}\geqslant P_{F_p}\{\min(1/N,c)(w_{1,r}+\cdots$$
$$+w_{r,r})\leqslant A_p\}\geqslant\gamma. \tag{5.66}$$

上式中的最后一个不等式与（5.55）式完全相同。因而，可以利用 $c=2A_p/[\chi_\gamma^2(2r)]$，这时它满足不等式（5.65）。统计量

$$T_3=\min(2A_p/[\chi_\gamma^2(2r)],1/N)S_{\nu,r}^{(1)} \tag{5.67}$$

是按 $[N,Б,T^{(1)}]$ 方案进行试验时，x_p 的 γ 置信下限，式中

$$S_{\nu,r}^{(1)}=\begin{cases}S(t_{(r)}), & \nu\geqslant r;\\ S(t_{(\nu)}), & \nu<r,\end{cases}$$

即等于 $\min(\nu,r)$ 次故障前的总工作时间。

必须注意，根据（5.67）式，可以获得对 $[N,Б,T]$ 方案的相应估计。确实，若取 $t_{(\nu)}^{*}=\min(T,t_{(\nu)})=T$ 代替 $t_{(\nu)}$，γ 置信下限只会减小。这时，用下列方法来构成 x_p 的 γ 置信下限。设 $\nu(T)$ ——按 $[N,Б,T]$ 方案进行试验在时刻 T 的故障数。引入统计量

$$S_r(T)=\begin{cases}NT, \nu(T)=0;\\ t_{(1)}+\cdots+t_{(\nu(T))}+(N-\nu(T))T, & 0<\nu(T)<r;\\ t_{(1)}+\cdots+t_{(r-1)}+(N-r+1)t_{(r)}, & \nu(T)\geqslant r.\end{cases}$$

这时，统计量

$$T_4=\min(2A_p/\chi_\gamma^2(2r),1/N)S_r(T)$$

是老化分布分位点x_p的γ置信下限。

在累加检查方案中，按照预先给定的序列$n_1, n_2, \cdots$，在发生故障的时刻将产品从试验中取出，而试验停止时刻与r次故障时刻相同。因此，累加检查方案中的x_p的γ置信下限的构成，与[N, Б, r]方案中的x_p的γ置信下限的构成相同。尤其是，在与总工作时间

$$S_6 = N t_{(1)} + (N - n_1 - 1)(t_{(2)} - t_{(1)}) + \cdots + (N - n_1 - \cdots - n_{r-1} - r + 1)(t_{(r)} - t_{(r-1)})$$

成比例的统计量中，

$$T_5 = \min(2A_p/\chi^2_\gamma(2r), 1/N) S_6$$

是x_p的γ置信下限。

平均老化分布函数分位点的下限估计 可将以上用作构成S_0老化分布分位点γ置信下限估计的方法，应用到平均老化分布类（S_0^*）中（见§4·2）。令$\ni(x_p)$——S_t^*类的所有分布集，此类分布的水平分位点的一般值等于x_p。若$F(t) \subset \ni(x_p)$，则

$$F(t) \leqslant F_p^*(t) = \begin{cases} 0, & t < x_p; \\ 1-(1-p)\exp\{-A_p(t-x_p)/x_p\}, & t \geqslant x_p. \end{cases} \tag{5.68}$$

这种分布函数F_p^*是平均老化分布函数。不等式（5.68）的几何意义如下：在平面上绘制分布函数$F(t) \in \ni(x_p)$的寿命函数图如图5.5所示，$A(x_p) = A_p = \ln(1-p)^{-1}$与横坐标$t = x_p$对应。由于$F(t) \in S_0^*$，所以寿命函数与过原点（0,0）的射线束中的任一射线只有一个交点。因此，过原点0和点（x_p, A_p）的斜率为A_p/x_p的射线，对所有的$t \geqslant x_p$来说，$A_p \geqslant A(t)$。于是，当$t < x_p$时，寿命函数$\tilde{A}(t) = 0$；当$t \geqslant x_p$时，$\tilde{A}(t) = A_p + (A_p/x_p)(t - x_p)$，不大于由分布集$\ni(x_p)$决定的任意寿命函数。

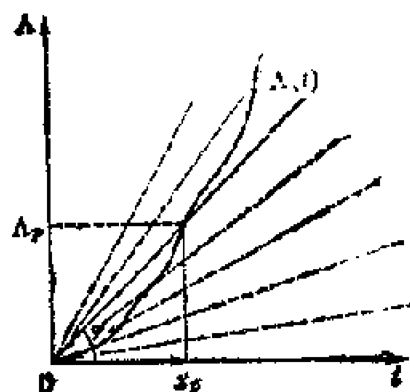


图 5.5

依寿命函数求分布函数时，可获得不等式（5.68）。对任意函数$F(t) \in \ni(x_p)$，从（5.68）式中可得出非递减函数：当$t < x_p$时，$u_p^*(t) = x_p$；当$t \geqslant x_p$时，$u_p^* = u_p^*(t) \geqslant t$，式中$F(t) = F_p^*(u_p(t))$。设$t_{(1)} \leqslant \cdots \leqslant t_{(\nu)}$—按某方案进行可靠性试验而获得的故障时刻，而$u^*_{(k)} = u_p^*(t_{(k)})$，$k = 1, \cdots, \nu$。这时，对于严格正统计量，根据（5.47）式，有

$$T \leqslant \sum_{k=1}^{\nu} (a_{k,\nu} - a_{k+1,\nu}) u_k^* = \sum_{k=1}^{\nu} a_{k,\nu}(u^*_{(k)} - u^*_{(k-1)}),$$
$$u_{\nu+1,\nu} = u^*_{(0)} = 0. \tag{5.69}$$

由于$F_p^*(t)$在点$t = x_p$上的跳跃值为p，

$$P_{F^*_p}(u^*_{(1)} = \cdots = u^*_{(d)} = x_p) = \binom{N}{d} p^d (1-p)^{N-d}, d = 1, \cdots, \nu.$$

用δ来表示等于$u^*_{(1)}$的随机变量，$u^*_{(1)}$与x_p相对应。当$\delta \geqslant 1$时，可将（5.69）式改写成以下形式：

$$T \leqslant a_{1,\nu} x_p + a_{\delta+1,\nu}(u^*_{(\delta+1)} - u^*_{(\delta)}) + \cdots + a_{\nu,\nu}(u^*_{(\nu)} - u^*_{(\nu-1)}).$$

同前面一样，在考虑到（5.69）式时，对于老化分布

$$P_N\left\{\sum_{k=1}^{r} a_{k,r}(t_{(k)}-t_{(k-1)})\leqslant x_p\right\} \geqslant P_F\left\{\sum_{k=1}^{r} a_{k,r}(u^*_{(k)}-u^*_{(k-1)})\leqslant x_p\right\}$$

$$= P_{F*_p}\left\{\sum_{k=1}^{r} a_{k,r}(u^*_{(k)}-u^*_{(k-1)})\leqslant x_p\right\}. \qquad (5.70)$$

(5.70) 式右端的概率P_{F*_p}由公式(5.68) 给出，此公式仅取决于x_p的一个未知参数。如果在任意x_p时，

$$P_{F*_p}\left\{\sum_{k=1}^{r} a_{k,r}(u^*_{(k)}-u^*_{(k-1)})\leqslant x_p\right\}\geqslant\gamma. \qquad (5.71)$$

然后选择系数$a_{k,r}$，则从 (5.70) 和 (5.71) 式中得出，统计量 (5.69) 式是任意平均老化分布函数分位点x_p的γ置信下限估计。

下面研究按$[N,Б,r]$方案试验时，获得γ置信下限估计的实例。同上述一样，在与总工作时间$S(t_{(r)})$成比例的一类统计量中求估计，即假定$a_{k,r}=c(N-k+1), c<N^{-1}, k=1,\cdots,r$。考虑到在$k>\delta$时，$(N-k+1)\Lambda_p/x_p(u^*_{(k)}-u^*_{(k-1)})$服从指数分布，由关于事件$\{\delta=d\}$的全概率公式 (5.71) 可得出

$$P_{F*_p}\left\{c\sum_{k=1}^{r}(N-k+1)(u^*_{(k)}-u^*_{(k-1)})\leqslant x_p\right\}=P_{F*_p}\{cN\leqslant 1\,|\,\delta=r\}\sum_{d=r}^{N}\binom{N}{d}p^d(1-p)^{N-d}$$
$$+\sum_{d=1}^{r-1}P_{F*_p}\left\{cNx_p+c\sum_{k=d+1}^{r}(N-k+1)(u^*_{(k)}-u^*_{(k-1)})\leqslant x_p\,|\,\delta=d\right\}\binom{N}{d}p^d$$
$$\times(1-p)^{N-d}+P_{F*_p}\left\{c\sum_{k=1}^{r}(N-k+1)(u^*_{(k)}-u^*_{(k-1)})\leqslant x_p\,|\,\delta=0\right\}(1-p)^N$$
$$=\sum_{d=r}^{N}\binom{N}{d}p^d(1-p)^{N-d}+\sum_{d=1}^{r-1}P_{F*_p}\left\{c\sum_{k=d+1}^{r}\frac{\Lambda_p}{x_p}(N-k+1)(u^*_{(k)}-u^*_{(k-1)})\right.$$
$$\left.\leqslant\Lambda_p(1-Nc)\,|\,\delta=d\right\}\binom{N}{d}p^d(1-p)^{N-d}+P_{F*_p}\left\{c\sum_{k=1}^{r}\frac{\Lambda_p}{x_p}(N-k+1)\right.$$
$$\left.\times(u^*_{(k)}-u^*_{(k-1)})\leqslant\Lambda_p\,|\,\delta=0\right\}(1-p)^N=\sum_{d=r}^{N}\binom{N}{d}p^d(1-p)^{N-d}$$
$$+\sum_{d=1}^{r-1}H_{2(r-d)}\left(\frac{2\Lambda_p(1-Nc)}{c}\right)\binom{N}{d}p^d(1-p)^{N-d}+H_{2r}\left(\frac{2\Lambda_p}{c}\right)(1-p)^N\geqslant\gamma.$$
$$(5.72)$$

式中$H_{2m}(x)$是具有$2m$自由度的χ^2分布函数：$H_{2m}(x)=1-L_{m-1}(x/2)$。

若在 (5.72) 式中$\sum_{d=r}^{N}\binom{N}{d}p^d(1-p)^{N-d}\geqslant\gamma$，则$c=1/N$。令$c_{\gamma,r}$——满足 (5.72) 式的最大数，并且在$a_{k,r}=c_{\gamma,r}(N-k+1)$时满足 (5.71) 式。亦即，统计量$T_Б=c_{\gamma,r}S(t_{(r)})$是平均老化分布函数水平分位点$x_p$的$\gamma$置信下限估计。

现仅对此例进行研究。对于其它方案，也包括累加检查方案，允许用比方法构成平均老化分布分位点的γ置信下限估计。

这时，自然会出现这样一个问题：怎样的线性严格正统计量可更好地对x_p进行估计呢？可用$[N,Б,r]$方案来回答这个问题。设g——满足不等式$I_p(k,N-k+1)\geqslant\gamma$的最大$k$。这时，可利用第$g$次故障时刻$t_{(g)}$作为$x_p$的$\gamma$置信下限。由于$t_{(g)}=t_{(1)}+(t_{(2)}-t_{(1)})+\cdots+(t_{(g)}-t_{(g-1)})$，所以$t_{(g)}$是严格正统计量。对于此统计量，$a_{1,r}=\cdots=a_{g,r}=1$，

$a_k=0, k>g$。因此，若判断出 $g=r$，则 $a_{\cdot r}=\cdots=a_{r\cdot r}=1$ 和统计量 $t_{\cdot r}$ 是最佳统计量，若 r 实质上大于 g，则在适当选择 $l\leqslant g\leqslant m\leqslant r$ 时，根据统计量 $T_{lm}=t_{(l)}+k_l S(t_{(l)}, t_{(m)})$ 获得估计。

从不等式(5.62)中可看到，在分布函数 $F\in S_0$ 近似服从绝对保障无故障工作时间 u 的指数分布时，准确性的损失随着 $1-a_{1r}$ 的增大而增大。因此，最好利用统计量 $a_{1r}=1$。

若 $I_p(1,N)<\gamma$，亦即 $P_F\{t_{(1)}\leqslant x_p\}<\gamma$，则必须利用统计量

$$T=N\frac{\ln(1-p)}{\ln(1-\gamma)}t_{(1)}=2N\frac{\ln(1-p)^{-1}}{\chi_\gamma^2(2)}S(t_{(1)}),$$

亦即，(5.45) 式所示的具有 $r=1$ 的统计量。随着故障数据的增加，就出现了利用其它线性严格正统计量的可能性。

老化分布产品按 $[N, B, r]$ 方案进行试验时，比值 $S(t_{(k)})/k$ 随 k 的增大而变小。因此，以下统计量可给出最好结果

$$T_1(k)=\min[2A_p/\chi_\gamma^2(2k),\ 1/N]S(t_{(k)}). \tag{5.73}$$

其中 $k\leqslant r$。M·П·卡明斯基（Каминский）曾提议选用最大 k 值，在 (5.73) 式中 k 的最大值等于 $1/N$。

当 $I_p(r, N-r+1)<\delta$ 时，在第 r 次故障前进行试验，可能获得比允许顺序统计量 $t_{(k)}$ $(k\leqslant r)$ 更好的 x_p 置信下限估计。

最后，简要地说明一下参考文献。有关威布尔-格涅钦科分布的假设检验和参数估计的全部文献，共计有 百多篇。在参考文献[202]中，对这些问题都进行了相当详细的研究。在参考文献[213]中，以很大的篇幅来论述 $t_{(i)}-t_{(i-1)}$ 的统计量。在参考文献[201]中，对威布尔-格涅钦科分布，关于无绝对保障时间，即 $u>0$ 的假设检验准则进行了研究。对于累加检查方案的极大似然估计和估计的某些特性，在参考文献[200]中进行了研究。在参考文献[68]中给出了 (5.44) 式，文献中还对顺序统计量的其它特性进行了研究。§5·2的第二部分，实质上是有关美国科学家巴罗和普罗尚所著参考文献[10,158,159]的论述。在这些参考文献中，可获得对于 $[N, B, r]$ 方案的平均老化分布分位点的 γ 置信下限估计；还可获得对于 S_0^* 类分布的 γ 置信上限估计以及对于非老化分布的估计。本节阐述的方法不同于参考文献[159,180]中的方法，用此方法可能获得对于较多试验方案的新的估计。在估计 (4.4) 式的分布参数 u 时所利用的统计量 (5.76) $(c-1)$，在参考文献[180]中进行了研究。

可用贝叶斯方法来解决如何获得老化分布函数 $F(t)\in S_0$ 分位点 x_p 的统计结论问题。主要困难是 S_0 类不是由有限个参数决定的分布族，利用Ю·К·别利亚耶夫（Ю·К·Беляев）提出的集中法就能解决这一问题。别利亚耶夫在《试验结果处理统计法》一文中（《知识》杂志1982年），对此法作了详尽的阐述

由于利用了集中法，因而就获得了对于分位点 x_p 不小于 x 的后验概率下限 $P_0(x|D)$。采用此法来处理按非参数检查方案进行试验时获得的数据D。

对集中法概述如下。先研究全部非递减连续函数 $u(x_p)=x_p$，$(u(t)\geqslant t, u(0)=0)$ 的集U。任意函数 $u(t)\in U$ 把 (4.48) 式的数据D变成以下数据

$$D_u=\{u(t_{1}),\cdots,u(t_{q});\ u(s_{1}),\cdots,u(s_{k})\}.$$

若（ .1）式的二参数指数族分布符合数据D_*，则按贝叶斯公式（4.4.），可计算出μ和λ的后验密度$a(\mu,\lambda|D_*)$，然后再求出后验概率

$$P_*(x\ D_*)=\int_{\mu,\lambda\ ix_p\ x} a(\mu,\lambda|D_*)d\mu d\lambda.$$

求得函数$P_0(x\ D)$，作为按全部$u(t)\in U$取得的函数$P_*(x\ D)$下限。（为实现$P_0(x\ D)$的计算，编制ЭBM程序。）令$S_{(\cdot)}<S_{(2)}<\cdots$ 检查时刻序列，$S_{(1)}=\min\limits_{i\in I}S_{(i)}$等等，$l$ 数$S\ ,\leqslant t_r\ =\min\limits_{i\in J}t_i$，集合$I,J$由（4.48）式的数据决定。$P_0(x\ D)$的计算规则，实质上随$l$的增长而复杂起来。对于许多方案，其中也包括对于[$N$,Б,$r$]、[$N$.Б,$r$]方案，$l=0$，所以$P_0(x\ D)$的计算就比较简单。

第六章 系统可靠性的置信估计

§6.1 根据部件二项试验的结果对系统可靠度置信下限的估计

系统可靠性特征量及其估计 系统在规定时间内无故障工作的概率，即系统的可靠度是系统的可靠性基本数量特征量之一。在本节和下一节中，将研究根据系统的部件试验数据对系统的可靠度进行估计的一般方法。所得到的结论很重要，因为这些结论可以在实质上影响系统结构的设计。例如，可能包括某部件的冗余设计。

如第二章所述，很多系统都可用网络框图来表示。图中的结点代表部件，结点间用有向线段连接之，箭头的方向表示部件传递功能的方向。当部件发生故障时，其对应的有向线段一断开（不通）。在第一章中，对部件(其可靠度是已知的)的并联和串联系统的可靠度计算问题进行了研究。由 m 种不同类型部件构成的串联系统是最简单的系统之一（见图6.1

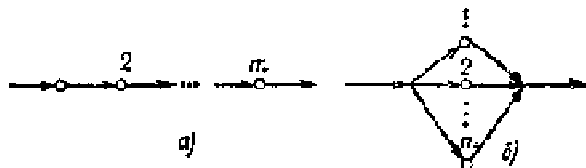


图 6.1

a））。当其任意一部件发生故障时，串联系统就发生故障，由 n 个部件组成的并联系统是最简单的冗余系统（图6.1б)）。这种系统，只要有一个部件未发生故障，就能工作。当串联系统中有部件冗余时，就获得串-并联系统（图6.2a)）。在某些情况下，冗余的实现不是用个别部件，而是用不同类型部件组成的串联子系统（图6.2б)）。这种系统称之为

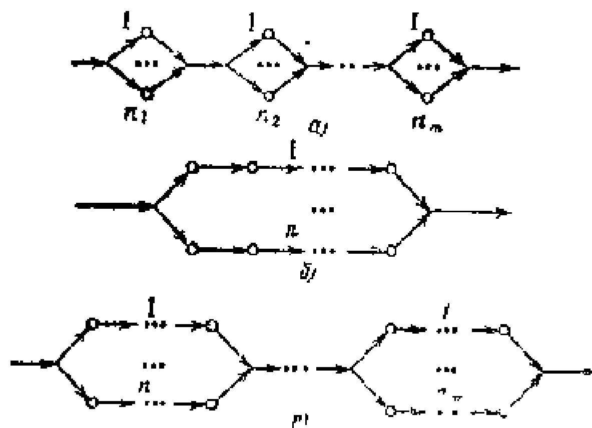


图 6.2

并-串联系统。由于串系统是更广泛的模型（图6.2в））。在上述每个系统中，无故障状态都与联接入口和出口的路相对应，最少与其中一条路相对应。

系统的可靠度，以及其它特征量的计算都取决于发生故障的时刻和排除故障的时间（对可能恢复或替换故障部件的可修系统来说）的随机性。首先，假设各种部件无故障工作的持续时间是相互独立的。根据这一假设，就不难求出在时间T内，最简单系统无故障工作概率的表达式。设$F_i(t)$和$F(t)$——分别为第i个部件无故障工作时间分布函数和由m个部件构成的系统的无故障工作时间分布函数。将第i个部件和系统在T内的无故障工作概率简单地表示为p_i和R，即$p_i=\bar{F}_i(T)$，$R=\bar{F}(T)$。对于串联系统（见图6.1a））

$$R=\prod_{i=1}^{m} p_i. \tag{6.1}$$

对于由n个不同部件构成的并联系统（见图6.1б））

$$R=1-\prod_{i=1}^{n}(1-p_i).$$

若所有并联的部件是相同的，则

$$R=1-(1-p)^n.$$

式中n——并联系统的部件数。

对于串-并联型系统（见图6.2a））的可靠度

$$R=\prod_{i=1}^{m}\left\{1-\prod_{j\in S_i}(1-p_j)\right\}. \tag{6.2}$$

式中S_i——第i个并联子系统。若第i个并联子系统的所有部件是相同的，则由(6.2)式可得

$$R=\prod_{i=1}^{m}\{1-(1-p_i)^{n_i}\}. \tag{6.3}$$

对于并-串联系统（见图6.2б））的可靠度

$$R=1-\prod_{i=1}^{m}(1-\prod_{j\in S'_i}p_j). \tag{6.4}$$

式中S'_i——第i个串联子系统。若串联子系统的所有n个部件是相同的，则由(6.4)式可得

$$R=1-(1-\prod_{j=1}^{n}p_j)^m.$$

对于串-并-串联系统（见图6.2в））

$$R=\prod_{i=1}^{m}\{1-\prod_{j=1}^{n_i}(1-\prod_{k\in S_{i,j}}p_k)\}.$$

式中$S_{i,j}$——第i个并联子系统中的第j个串联组的部件集；m——串联子系统数；n_i——第i个并联子系统中的串联部件数，$i=1$，…，m。

对复杂系统可靠性的估计非常繁琐，因而利用系统可靠度R的表达式是不适用的，此时可利用较简单的上限或下限估计。此类估计可根据路集和割集法获得，详见§3.1，可将那些不等式用适当形式重新写出。设系统由$i=1$，…，N的N个部件组成。$\varphi(i)$——第i个部件的型号。若w_1，…，w_k构成不相交路的部件序号集，则

$$R_w=1-\prod_{l=1}^{k}[1-\prod_{i\in w_l}p_{\varphi(i)}]\leqslant R, \tag{6.5}$$

其部件序号集C_1，…，C_k属于割集，则对于任意C_l，$l=1$，…，k，

$$R \leqslant 1-\prod_{i\in C_l}(1-p_i). \qquad (6.6)$$

由（6.6）式可得出

$$R \leqslant P = \min_{1\leqslant l\leqslant k}\{1-\prod_{i\in C_l}[1-p_i]\}. \qquad (6.7)$$

系统的可靠度R是部件可靠度p_1，…，p_N的函数（N——构成系统的所有部件的类型数），其精确值通常是未知的。若系统可靠性的其它基本特征量已知，则结论是相类似的：所研究的特征量为多变量函数。例如，由N个不同型可修复部件构成的串联系统的稳态可用度为

$$K_r = \prod_{i=1}^{N}\frac{m'_i}{m'_i+m''_i}. \qquad (6.8)$$

式中m'_i——第i个部件平均无故障工作时间；m''_i——第i个部件平均修复时间。这样，按照（6.8）式知：K_r是$2N$个变量m'_i，m''_i的函数。

在本节中，仅研究以下问题。假定，必须求点估计，或者根据不同类型部件的试验数据，求出系统的可靠度R置信下限。

假设，已知按[N_i，Б，T]方案试验的部件可靠性试验数据。试验时间T和要求的系统无故障持续时间相同。若在试验过程中只计发生故障的部件数，则称这种试验为**二项试验**。令d_i表示在N_i个受试部件中到时刻T所发生故障的部件数，则部件的可靠度点估计为

$$\hat{p}_i = (N_i - d_i)/N_i \qquad (6.9)$$

此估计是无偏有效估计和渐近正则估计。为获得系统$R=R(p_1, p_2, \cdots, p_N)$的点估计，可用$\hat{p}_i$代替未知的$p_i$。对于由不同类型部件构成的串联系统$R$的估计为

$$\hat{R} = \prod_{i=1}^{N}\left(\frac{N_i-d_i}{N_i}\right). \qquad (6.10)$$

此估计是由（6.1）式决定的R的无偏估计

若对系统可靠性提出较高的要求，则在其配套时，就要利用高可靠度的部件。可以预料（而在实践中也常常如此），在进行可靠性试验时，或者一般不出现故障，或者故障数不大。这时，估计给出$\hat{R}=1$。尽管这一估计还是不错的，然而它未必能使人们信服。除此之外，若进行两批试验时都没有出现故障，则利用同一估计$\hat{R}=1$。同时也明确了，在对两批可靠性试验数据进行联合统计处理时，可靠性应当更充分地得到证明。实际上，在受试部件数增加时，确实无法消除故障部件。所有这些都说明，利用置信估计是适宜的。关于根据系统的部件试验（或根据元件的试验）数据，对系统可靠性特征量进行置信估计的方法，已获得的理论结果很多，在本节和下一节中都有论述。

现仅对部件已知数据进行论述，并在最小范围里对其进行证明。如果希望更详细地了解根据部件试验数据进行系统置信估计的问题，可参阅参考文献[105]。

部件无故障工作概率的置信估计 首先，研究最简单的情形，根据[N，Б，T]方案的二项试验结果，构成部件可靠度$p=\bar{F}(t)$的置信估计。假设在试验时记录了故障数d，求p的γ置信下限。依定义9（§4.3），必须使每个d与$\varphi(d)$相符，且这时的$\{p\geqslant\varphi(d)\}$，在任意p时将具有不小于γ的概率。按[N，Б，T]方案进行试验时，故障部件数d的故障概率等于

$b_N^d(1-p)$，则获得参数为N和1－p的二项分布式（4.10）。现在研究在平面坐标系中，形成的线段Ж$_d$平行于横轴的点(p, d)　$0\leqslant p\leqslant 1$，$d=0, 1, \cdots, N$（图6.3）。使

$$P_p\{d\geqslant k_\gamma(p)\}=\sum_{d=k_\gamma}^{N} b_N^d(1-p)>\gamma\geqslant \sum_{d=k_\gamma+1}^{N} b_N^d(1-p). \tag{6.11}$$

这样的每一个整数$k_\gamma=k_\gamma(p)$与一个p对应

函数$k_\gamma(p)$是p的非递增函数，$k_\gamma(0)=N$，$k_\gamma(1)=0$。在图6.3中，低于点$(p, k_\gamma(p))$的线段用实线给出。各线段Ж$_d$的总和构成集合，用A_γ表示。若$p\geqslant p_*(d)$，其中点$(p_*(d), d)$是线段Ж$_d$左端，在给定d值时，点$(p, d)\subset A_\gamma$。事件$(p, d)\subset A_\gamma$可用两个等效的方法表示，即$\{d\geqslant k_\gamma(p)\}$或$\{p_*(d)\leqslant p\}$。因此，从（6.11）式中可得出

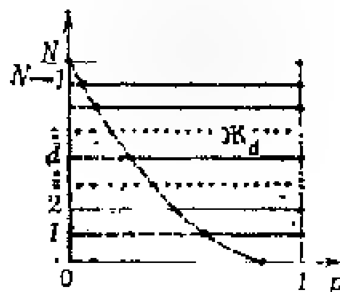


图 6.3

$$P_p\{p_*(d)\leqslant p\}=P_p\{d\geqslant k_\gamma(p)\}\geqslant\gamma \tag{6.12}$$

上式表明，统计量$p_*(d)$是d的函数，它是概率p的γ置信下限估计。函数$k_\gamma(p)$是右连续的常数。$p=p_*(d)$对应于$k_\gamma(p_*(d))=d$的点；$p<p_*$对应于$k_\gamma(p)>d$。于是，可从方程

$$\sum_{c=d+1}^{N} b_N^c[1-p_*(d)]=\gamma,$$

或从等效方程

$$\sum_{c=0}^{d} b_N^c[1-p_*(d)]=1-\gamma \tag{6.13}$$

中求出$p_*(d)$值。若$d=0$，即在试验中未发生故障，则（6.13）式采用以下形式：$p_*^N(0)=1-\gamma$。这样就得到

$$p_*(0)=(1-\gamma)^{1/N}. \tag{6.14}$$

由下式可解出部件可靠度的γ置信上限估计$p^*(d)$

$$\sum_{c=0}^{d-1} b_N^c[1-p^*(d)]=\gamma. \tag{6.15}$$

利用容量在100步以上的微机可解克洛普佩尔-皮尔逊方程，而解（6.13），（6.15）式并不困难。

对高可靠部件试验时，观测的故障数d不大，这时，可利用泊松近似法计算二项分布，因为，（6.13）左端的二项和，可用Л·Н·博利舍夫Большев[23]所修正的泊松和代替

$$L_d\{(2N-d)[1-p_*(d)]/[1+p_*(d)]\}=1-\gamma. \tag{6.16}$$

因为$L_d(x)=1-H_{2d+2}(2x)$，式中$H_{2d+2}(2x)$——具有自由度$2d+2$的χ^2分布函数，则从（6.16）式中得

$$(2N-d)p_*(d)/(2-p_*(d))=\chi_\gamma^2(2d+2)/2, \tag{6.17}$$

式中$\chi_\gamma^2(m)$——具有自由度m的χ^2分布的γ水平分位点。解关于$p_*(d)$的方程(6.17)的同时，可得到γ置信下限估计的近似表达式

$$p_*(d)=[4N-2d-\chi_\gamma^2(2d+2)]/[4N-2d+\chi_\gamma^2(2d+2)]. \tag{6.18}$$

现在举一数字实例。用图解法说明近似法的准确性。令$N=30$，而$d=0$，这时按公式（6.14）计算出准确值（取二位有效数字）$p_*(0)=0.926$。若利用参考文献[98]中的χ^2分布

表，则$\chi^2_{0.9}(2)=4.605$，按公式(6.14)计算到三位有效数，得

$$p_*(0)=(120-4.605)/(120+4.605)=0.926.$$

两值相符。

在部件试验没有发生故障的条件下，对系统可靠度的置信下限估计 在对与系统的部件型号相同的部件试验时，没有发生故障，根据这种特殊情况估计系统的可靠性。这是一种特殊的，但又是具有重要意义的课题。正是由于这种情形的出现，使得对系统可靠度R的点估计不能令人满意。

设对m种类型部件，按$[N_i, \cdots, T]$方案进行试验($i=1, \cdots, m$)。若试验结果仅记录故障部件数，则试验数据用向量$\mathbf{x}=(d_1, \cdots, d_m)$表示，其中$d_i$——第$i$型部件故障数。零向量$\mathbf{x}_0=(0, \cdots, 0)$表示试验时无故障。用向量$\mathbf{p}=(p_1, \cdots, p_m)$表示其分量是$i$型部件在时刻$T$的可靠度$p_i(i=1, \cdots, m)$。在完全没有$p_i$的信息时，必须把向量$\mathbf{p}$看作是属于$m$维立方$K_m=\{\mathbf{p}: 0\leqslant p_i\leqslant 1, i=1, \cdots, m\}$的点。当部件可靠度值构成了向量$\mathbf{p}$时，用$P_{\mathbf{p}}(A)$表示事件$A$的概率。须注意，向量观察值$\mathbf{x}_0$的概率，即试验时无故障的概率，等于$P_{\mathbf{p}}(\mathbf{x}=\mathbf{x}_0)=p_1^{N_1}\cdots p_m^{N_m}$。设$\gamma$——$R$的置信下限的置信度。现在来研究$m$维立方子集

$$K^0_m=\{\mathbf{p}: p_1^{N_1}\cdots p_m^{N_m}\geqslant 1-\gamma\},$$

即由K_m的点$\mathbf{p}$构成的子集，对于这些点，$p_1^{N_1}\cdots p_m^{N_m}\geqslant 1-\gamma$。使随机集合

$$K_x=\begin{cases} K^0_m, & \mathbf{x}=\mathbf{x}_0; \\ K_m, & \mathbf{x}\neq\mathbf{x}_0. \end{cases} \tag{6.19}$$

与试验结果$\mathbf{x}$相符。随机集合（6.19）在任意$\mathbf{p}$时具有

$$P_{\mathbf{p}}\{\mathbf{p}\in K_x\}\geqslant\gamma \tag{6.20}$$

的特性，即集合K_x包含概率不小于γ的$\mathbf{p}$。若$\mathbf{p}\in K^0_m$，则$\mathbf{p}\in K_x$与$\mathbf{x}$无关。若$\mathbf{p}\notin K^0_m$，则仅在$\mathbf{x}\neq\mathbf{x}_0$时，$\mathbf{p}\in K_x$。这时有

$$P_{\mathbf{p}}=\{\mathbf{p}\in K_x\}=P_{\mathbf{p}}\{\mathbf{x}\neq\mathbf{x}_0\}=1-p_1^{N_1}\cdots p_m^{N_m}\geqslant 1-(1-\gamma)=\gamma.$$

这样，对于任意$\mathbf{p}\in K_m$，能满足（6.20）式。

采用统计量

$$R_*(\mathbf{x})=\begin{cases} \inf\limits_{\mathbf{p}\in K^0_m} R, & \mathbf{x}=\mathbf{x}_0, \\ 0, & \mathbf{x}\neq\mathbf{x}_0, \end{cases} \tag{6.21}$$

式中$\inf\limits_{\mathbf{p}\in K^0_m} R$——$m$维变量函数$\mathbf{p}=(p_1, \cdots, p_m)\in K^0_m$的概率$R=R(T, \mathbf{p})$下确界。通常，这一最小值在集$K^0_m$的边界$\partial K^0_m$上获得，此边界满足方程

$$p_1^{N_1}\cdots p_m^{N_m}=1-\gamma. \tag{6.22}$$

可以预料，图6.4中标出的对$m=2$，$N_1=30$，$N_2=20$和$\gamma=0.9$的边界∂K^0_m接近于直线。在N_i较大时，（6.22）式中的所有数p_i接近于1。取对数便得到

$$\ln(1-\gamma)=N_1\ln[1-(1-p_1)]+\cdots+N_m\ln[1-(1-p_m)]$$
$$\sim N_1(1-p_1)+\cdots+N_m(1-p_m),$$

亦即，K^0_m接近于被平面$N_1p_1+\cdots+N_mp_m=N_1+\cdots+N_m-\ln(1-\gamma)$截去峰值邻域$(1, \cdots, 1)$

* 一下标p应为黑体的，下同；下标x应为黑体的，下同。

的立方K_m的单纯形。从图6.4中可看出，在$m=2$时，K^0_m很近似三角形。

对任意x，从事件$\{p\in K_x\}$中得出事件$\{R_*(x)\leqslant R\}$。因此，考虑到（6.20）式，便得到

$\gamma\leqslant P_p\{p\in K_x\}\leqslant P_p\{R_*(x)\leqslant R\}$，　　(6.23)

对任意可能$p\in K_m$不等式(6.23)都是正确的。因而，由（6.21）式决定的$R_*(x)$是R的γ置信下限估计。这一估计仅在无故障时才是有意义的。

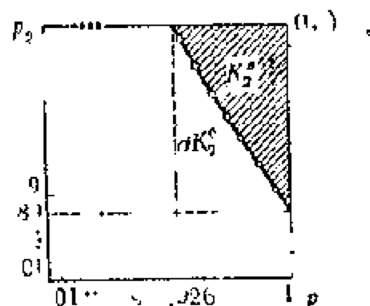


图 6.4

现在研究，以利用一般公式（6.21）为基础的置信估计实例。设系统为串联系统（见图6.1(a)）。这时由公式（6.1）给出R。由（6.21）式知，串联系统可靠度的下限

$$R_*(x_0)=\inf_{p\in K_0}\prod_{i=1}^{m}p_i.$$

由于

$$\ln\prod_{i=1}^{m}p_i^{N_i}=\sum_{i=1}^{m}N_i\ln p_i$$

即等于上凸函数之和，所以集K^0_m是上凸的。

令　　$p_i=e^{-z_i}, i=1,\cdots,m$.　　(6.24)

将（6.24）代入（6.1）式，便得

$$R=\exp\left(-\sum_{i=1}^{m}z_i\right). \tag{6.25}$$

集K^0_m相应地变为凸集

$$\widetilde{K}^0_m=\{z=(z_1,\cdots,z_m):z_i\geqslant 0,\ i=1,\cdots,m,\ \sum_{i=1}^{m}z_iN_i\leqslant-\ln(1-\gamma)\} \tag{6.26}$$

将（6.26）代入(6.21)和(6.25)式便得

$$R_*(x_0)=\exp\{-\sup_{z\in\widetilde{K}^0_m}\sum_{i=1}^{m}z_i\}. \tag{6.27}$$

集合$\widetilde{K}^0_m$上的线性函数$\sum_{i=1}^{m}z_i$达到了坐标为

$$z^1=\left(\frac{1}{N_1}\ln\frac{1}{1-\gamma},0,\cdots,0\right),\ z^2=\left(0,\frac{1}{N_2}\ln\frac{1}{1-\gamma},0,\cdots,0\right)$$

$$\cdots,\ z^m=\left(0,\cdots,0,\frac{1}{N_m}\ln\frac{1}{1-\gamma}\right)$$

的某一$\widetilde{K}_m$边界点上的最大值

于是

$$\max_{z\in\widetilde{K}^0_m}\sum_{i=1}^{m}z_i=\max_{i=1,\cdots,m}\frac{1}{N_i}\ln\frac{1}{1-\gamma}=\frac{1}{N_0}\ln\frac{1}{1-\gamma} \tag{6.28}$$

式中$N_0=\min_{i=1,\cdots,m}N_i$。由（6.28）和（6.27）便可求得对$R$的$\gamma$置信下限表达式

$$R_*(x_0)=\exp\left\{-\frac{1}{N_0}\ln\frac{1}{1-\gamma}\right\}=(1-\gamma)^{1/N_0}. \tag{6.29}$$

为计算串联系统无故障工作概率的γ置信下限，必须根据（6.14）式求出少量受试部件可靠度的γ置信下限估计。由（6.29）式知这一估计也将是串联系统的γ置信下限估计。这一最佳结果是P·A·米尔内（Мирный）和A·Д·索洛维约夫（Соловьев）在参考文献[93]中首次给出的。И·B·帕夫洛夫（Павлов）在参考文献[165]中指出，在某种意义上，γ置信下限估计（6.21）式不可能再改善了。

假设R对$\mathbf{p}$（按对所有变量p_i，$i=1,\cdots,m$）是连续的非递减函数，而$\min\limits_{p\in K^0_m} R=R(x_0)$在边界$\partial K_m$点$\tilde{\mathbf{p}}$上得到。由于集$K_m$是凸集，则它包含所有的线段上的点$\mathbf{p}_t=\tilde{\mathbf{p}}+t(\mathbf{p}_1-\tilde{\mathbf{p}})$，$0\leqslant t\leqslant 1$；$\mathbf{p}_1=(1,\cdots,1)$，$\mathbf{p}_t=(p_{1t},\cdots,p_{mt})$，$R_t=R(\Gamma,\mathbf{p}_t)$对$t$非递减。现在假定

$$1>\varphi(\mathbf{x}_0)>R_*(\mathbf{x}_0) \tag{6.30}$$

为$\varphi(\mathbf{x})$的γ置信下限估计。须注意，$1=R_1>\varphi(\mathbf{x}_0)>R_*(\mathbf{x}_0)=R_0$。函数$R_t$对$t$连续，因此求得的$t'(0<t'<1)$，当$t\in[0,t')$时，$R_t=\gamma(\mathbf{x}_0)$和$R_t<\varphi(\mathbf{x}_0)$。事件$\{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0\}\subset\{\varphi(\mathbf{x}_0)>P\}$，因此互补事件概率。

$$P_t\{\varphi(\mathbf{x})\leqslant R_t\}\leqslant 1-P_t(\mathbf{x}=\mathbf{x}_0)=1-h(t), \tag{6.31}$$

式中$t\in[0,t')$；$h(t)=\prod\limits_{i=1}^{m}P_{it}^{N_i}$——对$t$是连续的严格递增函数，其最小值$h(0)=1-\gamma$，因为$\mathbf{p}_0=\tilde{\mathbf{p}}\in\partial K_m$。因此，对于所有$t\in(0,t')$，$h(t)>1-\gamma$。对于$t\in(0,t')$，由（6.31）式知

$$\gamma>1-h(t)\geqslant P_t\{\varphi(\mathbf{x})\leqslant R_t\}.$$

该不等式表明，$\mathbf{p}=\mathbf{p}_t$时，$\varphi(\mathbf{x}_0)$不是γ置信下限估计。因而，（6.30）式的假设是不正确的。但这也表明，在$\mathbf{x}=\mathbf{x}_0$时，具有比（6.21）式更小的γ置信下限估计是没有的。

根据公式（6.21），对于具体类型的冗余系统，求无故障时R的γ置信下限估计表达式。

设系统为串-并联系统（图6.2(a)）。考虑到（6.24）和（6.3）式变量的替换

$$R=\exp\{-f(\mathbf{z})\}, \tag{6.32}$$

式中$f(\mathbf{z})=\sum\limits_{i=1}^{m}\varphi_i(z_i)$，$\varphi_i(z_i)=-\ln[1-(1-e^{-z_i})^{n_i}]$。函数$f(\mathbf{z})$上凸，因为它是上凸函数$\varphi_i(z_i)$之和。因此，由（6.26）式决定的集合$\tilde{K}^0_m$的极大值$f(\mathbf{z})$，在某一边界点$\mathbf{z}$（$i=1,\cdots,m$）上达到。最后，同以上给出的置信估计一样，对于串联系统求得：对于串-并联系统，由公式（6.3）或（6.32）式决定的R置信下限估计为

$$R_*(\mathbf{x}_0)=\min\{1-[1-(1-\gamma)^{1/N_i}]^{n_i}\}. \tag{6.33}$$

（公式（6.33）是O·И·捷斯奇（Тескин）在参考文献[137]中给出的）。

以下两个结论是帕沃洛夫（Павлов）在参考文献[165]中给出的。现在来研究串-并联系统（见图6.2($б$)），此并联子系统是由不同部件组成的。设$p_{ij}=e^{-z_{ij}}$——第i个并联子系统中第j型部件的可靠度。概率R记作（6.32）的形式，式中$\mathbf{z}=(\mathbf{z}_1,\cdots,\mathbf{z}_m)$，$\mathbf{z}_i=(z_{i1},\cdots,z_{in_i})$；

$$f(\mathbf{z})=\sum_{i=1}^{m}\varphi_i(\mathbf{z}_i),\varphi_i(\mathbf{z}_i)=-\ln\{1-\prod_{j=1}^{n_i}(1-e^{-z_{ij}})\}.$$

当集合K^0_m变为新的变量z_{ij}之后，用以下形式表示：

$$\tilde{K}^0_m=\left\{\mathbf{z}:z_{ij}\geqslant 0,\ \sum_{i,j}N_{ij}z_{ij}\leqslant\ln\frac{1}{1-\gamma}\right\}. \tag{6.34}$$

式中N_{ij}——在第i个并联子系统中的第j型受试部件数。

按(6.34)式求$f(z)$的极大值问题，可分为两步来解决。先求出函数

$$\phi_i(y_i)=\max\prod_{j=1}^{n_i}(1-e^{-z_{ij}}).$$

式中极大值由下述集合给出

$$K^{y}_{n}(y_i)=\{z_{ij}: z_{ij}\geqslant 0,\ \sum_{j=1}^{n_i}N_{ij}z_{ij}=y_i\geqslant 0\}.$$

根据拉格朗日不定乘数法来寻求极大值。然后，求出未知$f(z)$的极大值，等于

$$\max_{\tilde{K}^0_m}\{-\sum_{i=1}^{m}\ln[1-\phi_i(y_i)]\},\ \tilde{K}^0_m=\{y: y_i\geqslant 0,\ \sum_{i=1}^{m}y_i\leqslant -\ln(1-\gamma)\}.$$

最后，给出下列不同型部件冗余串-并联系统可靠度R的γ置信下限估计的计算方法。这一估计等于

$$R_*=\min_{1\leqslant i\leqslant m}[1-\varphi_i(y_0)],\ \varphi_i(y_0)=\prod_{j=1}^{n_i}\frac{y_0}{(y_0+N_{ij})},$$

y_0可由方程

$$\sum_{j=1}^{n_i}N_{ij}\ln\left(1+\frac{y_0}{N_{ij}}\right)=-\ln(1-\gamma) \tag{6.36}$$

解出。此方程左端是y_0的非递减函数。由于$-\ln(1-\gamma)>0$，所以$y_0>0$。函数$x\ln(1+t/x)$是t的非递减函数，并且是上凸的，所以$N_{ij}\ln(1+y/N_{ij})\geqslant N_0\ln(1+y/M_0)$，其中$N_0=\min_{i,j}N_{ij}$，$M_0=\max_{i,j}N_{ij}$。因此，$y_0<y_*$，其中$y_*$是方程$mN_0\ln(1+y_*/M_0)=-\ln(1-\gamma)$的解。解关于$y_*$的方程，便得

$$y_*=M_0\{(1-\gamma)^{-1/(N_0 m)}-1\};$$

然后，用逐次对半划分区间$(0,y_*)$的方法，可很快找到方程(6.36)的精确近似解。

若系统是由n个不同冗余部件构成的并联系统，而各型受试部件数量相同($N_i=N$)，则R的γ置信下限估计用以下式给出

$$R_*(x_0)=1-[1-(1-\gamma)^{1/(nN)}]^n. \tag{6.37}$$

（公式(6.37)是C·C·苏达柯夫(Судаков)在参考文献[135]中给出的。）

计算γ置信下限的简单算法，И·В·帕沃洛夫(Павлов)在论述并-串联系统(图6.2(б))的参考文献[105]中给出。令N_{ij}——第i个冗余串联子系统中第j型受试部件数，$N_{i0}=\min_j N_{ij}$，而w_0——方程

$$\sum_{i=1}^{m}N_{i0}\ln(1+w_0/N_{i0})=-\ln(1-\gamma) \tag{6.38}$$

之解。这时，当受试部件无故障时，R的γ置信下限估计为

$$R_*(x_0)=\prod_{i=1}^{m}w_0/(w_0+N_{i0}). \tag{6.39}$$

对于复杂系统，可给出近似值来求γ置信下限估计。根据不等式(6.5)和(6.7)可得出，当无故障时，

$$R_{w*}(x_0)=\inf_{P\in\Lambda^0_m}P_w\leqslant R_*\leqslant R_{c*}(x_0)=\inf_{P\in\Lambda^0_N}R_c.$$

位于不等式（6.5）左端的表达式$R_{п}$对应于并-串联系统（见图6.2(б)），而（6.7）式右端的$R_{\text{с}}$对应于串-并联系统（见图6.2(a)）。求此类系统的γ置信下限估计的方法，在本节中已做了论述。应当利用公式（6.35）、（6.36）来计算$R_{п*}(x_0)$，而利用公式（6.38）和（6.39）来计算$R_{с*}(x_0)$。在满足上述约束条件下，可利用较简单的公式（6.37）和（6.33）。

对与本节内容有关的参考文献谈几点意见。系统的可靠度与其配套部件的可靠度的关系，在巴罗和普罗尚所著的[161]中做了详尽的论述。其中对一般单调关联系统，包括所研究的各类型的系统（并-串联、串-并联等等），都作了研究。这里还可找到类似于(6.5)，(6.7)式的系统可靠度的估计。此类估计在帕沃洛夫的[105]中做了引证。在伯努利试验表中的"累积"概率置信估计，在有关数理统计的大部分教科书中都提出了。这些，瓦尔金（Варден）在参考文献[32]中也做了论述。有关泊松分布，二项分布和超几何分布近似法的准确性问题，莫列纳尔（Моленар）在参考文献[206]中做了详尽的论述。米尔内和索洛维约夫对无故障条件下的系统可靠性置信估计问题在参考文献[44]中做了相当仔细的研究。综上所述，对于个别系统，提斯基和苏达科夫在参考文献[135，137]中给出了γ置信下限估计的简单表达式。最后还应指出，帕沃洛夫的著作[105]也是很重要的参考文献。

§6·2 根据部件试验结果对系统可靠性特征量置信估计的一般方法

置信区间法 现在来研究，当参数θ_i决定统计数据x_i，$i=1$，…，m的概率分布时，未知参数向量$\theta=(\theta_1, \cdots, \theta_m)$的$\gamma$置信上限和下限估计的构成问题。因此，关于参数向量真值$\theta\in\Theta$的统计数据，由数据向量$x=(x_1, \cdots, x_m)\in Ы$给出（Ы——所有可能数据x的集合，而$\Theta$——所有可能参数值$\theta$的集合）。在§6.1中所研究的系统可靠度置信估计问题中，$\theta=(p_1, \cdots, p_m)$，$g(\theta)=R(\Gamma, p)$，$x=(d_1, \cdots, d_m)$。

令数据空间$G_\theta\subset Ы$中的集合，即所有$\theta\in\Theta$满足

$$P_\theta\{x\in G_\theta\}\geqslant\gamma. \tag{6.40}$$

这里$P_\theta(A)$——当参数值等于θ时，事件A的概率。当满足(6.40)式时，对于任意$\theta\in\Theta$来说，数据x处于集合G_θ中的概率不小于γ。根据集合$\{G_\theta\}$，可构成参数空间集合Θ。为此，可把某些θ值的集C_x同每个$x\in Ы$进行比较，在这些θ值时，$x\in G_\theta$，即

$$C_x=\{\theta: x\in G_\theta\}\subset\Theta.$$

事件$\{x\in G_\theta\}$获得表示法$\{\theta\in C_x\}$的等价型，因此，在考虑到（6.40）式时，对任意θ具有

$$P_\theta\{\theta\in C_x\}=P_\theta\{x\in G_\theta\}\geqslant\gamma.$$

集合$\{C_x\}$具有以下特性：在C_x中包含有未知参数θ真值的概率不小于γ。

定义1 在参数空间Θ中，把满足（6.40）式的集合$\{C_x\}$，称为**γ置信集合**。若下限为

$$\inf_\theta P_\theta\{\theta\in C_x\}=\gamma,$$

则称γ为**集合$\{C_x\}$的置信度**。

确定函数$f(\theta)$的γ置信下限和上限估计的问题（在§4.3中已给出其定义），可根据相应的

① 下标θ应为黑体，下同。

方式选择出的γ置信集合来解决。集合的选择与数据x无关，例如，在可靠性试验之前进行。按公式

$$g_*(x)=\inf_{\theta\in C_x} g(\theta),\ g^*(x)=\sup_{\theta\in C_x} g(\theta). \qquad (6.41)$$

求出γ置信下限和上限估计。由于

$$\{\theta\in C_x\}\subset\{\inf_{\theta\in C_x} g(\theta)\leqslant g(\theta)\},\ \{\theta\in C_x\}\subset\{g(\theta)\leqslant\sup_{\theta\in C_x} g(\theta)\},$$

所以，根据（6.40）式，可得到

$$\gamma\leqslant P_\theta\{\theta\in C_x\}\leqslant P_\theta\{g_*(x)\leqslant g(\theta)\},$$

$$\gamma\leqslant P_\theta\{\theta\in C_x\}\leqslant P_\theta\{g(\theta)\leqslant g^*(\theta)\}.$$

这不等式在任意θ时都能满足，即$g_*(x)$和$g^*(x)$满足§4·3的定义9和10。

若回到§6·1的实例上来，就会看到，置信估计的计算是根据公式（6.41）进行的，而（6.19）式中的集合$\{K_x\}$不是别的，正是γ置信区间。

在§4.3中，曾对γ置信下限估计的准确性进行比较。然而只有在极其罕见的问题中才能得到最精确的置信估计。所谓最精确的γ置信估计是使置信区间尽量短。

现在来研究构成最精确γ置信下限估计的范围问题。在§4·3中指出，置信估计问题与假设检验问题有紧密的联系。假设，对于每个g_0值，可构成对原假设$H_0=\{\theta: g(\theta)\leqslant g_0\}$与竞争假设$H_1=\{\theta: g(\theta)>g_0\}$进行比较检验的最大功效（不变的）非随机化准则，其范围等于$\alpha=1-\gamma$。令$\theta_0\in A_g^{g_0}=\{\theta: g(\theta)=g_0\}$，$G_{\theta_0}$为——x的区间，即当$x\in G_{\theta_0}$时接受假设$H_0$，当$x\notin G_{\theta_0}$时，拒绝假设$H_0$。在改变$g_0$值的同时，获得满足（6.40）式的区间$\{G_{\theta_0}\}$。置信区间$\{C_x\}$属于这一区间。首先，假设$\{\theta_0\in C_x\}=\{\inf_{\theta'\in C_x} g(\theta')\leqslant g_0\}$。然后，再引入一个重要假设。假设对于任意$\theta\in H_1$，$g(\theta)>g_0=g(\theta_0)$，存在

$$P_\theta\{x\in G_{\theta_0}\}=P_\theta\{\theta_0\in C_x\}=P_\theta\{g_*(x)=\inf_{\theta'\in C_x} g(\theta')\leqslant g(\theta)\}. \qquad (6.42)$$

由于在任意θ_0时，接受假设H_0的区间G_θ的准则是最大风险准则，且大小为α，则当$\theta\in H_1$时，准则拒绝错误假设H_0的概率$P_\theta\{\theta_0\notin C_x\}$最大。且同其它$\gamma$置信区间相比，（6.42）式概率值最小。这就是说，按区间$\{G_{\theta_0}\}$构成的γ置信下限是最精确的。

简化法 首先，研究数据x和参数θ是实数的特殊情况。令$F(x,\theta)$——试验数据的分布函数。令$u_\gamma(\theta)$——等于满足$F(u,\theta)\geqslant\gamma$的$u$之最小值，而$v_\gamma(\theta)$——等于满足$1-F(v,\theta)\geqslant\gamma$的$v$之最大值，然后，引入两个函数$u=u_\gamma(\theta)$和$v=v_\gamma(\theta)$。集合$G_\theta=\{x: x\leqslant u_\gamma(\theta)\}$具有以下特性：在任意$\theta$时，都满足（6.40）式。若取集合$G'_\theta=\{x: x\geqslant v_\gamma(\theta)\}$作为$G_\theta$，亦即满足（6.40）式。按照上述$\gamma$置信区间的一般方法，集合$C_x=\{\theta: x\leqslant u_\gamma(\theta)\}$，即由$\theta$值（这时$u_\gamma(\theta)\geqslant x$）构成的集，属于$\{G_\theta\}$区间。集合$C'_x=\{\theta: x\geqslant v_\gamma(\theta)\}$属于$\{G'_\theta\}$区间。该区间正是$\{C_x\}$和$\{C'_x\}$的$\gamma$置信区间。

现在要注意两种重要的特殊情况：第一，u和v对θ是非递减的；第二，u和v对θ是非递增的。在这两种情况下，γ置信集都是区间。在第一种情况下，求得γ置信下限（估计）θ_*和上限（估计）θ^*，分别作为方程的最小和最大解

$$u_\gamma(\theta_*)=x;\ v_\gamma(\theta^*)=x.$$

在第二种情况下，分别作为方程的最大和最小解

$$u_\gamma(\theta^*)=x;\quad v_\gamma(\theta_*)=x.$$

因而，求一（一维）参数置信限——相对简单的问题。可用类似的途径作为求多维未知参数$\theta=(\theta_1, \cdots, \theta_m)$和向量$\mathbf{x}=(x_1, \cdots, x_n)$的函数$g(\theta)$置信估计的基础。令$\Gamma_g=\{\theta:g(\theta)=g\}$，即符合$g$值的函数元素$g(\theta)$的$\gamma$置信限的构成，可以用某些实统计量$T=T(x)$作为基础。设$F_T(t, \theta)$——该统计量的分布函数。如上所述，引入$\theta$的两个函数

$$u_\gamma(\theta)=\inf\{t:F_T(t, \theta)\geq\gamma\};\quad v_\gamma(\theta)=\sup\{t:1-F_T(t, \theta)\geq\gamma\}. \tag{6.43}$$

现在来研究在区间Γ_g上的这些函数值。根据(6.43)式的函数来确定实自变量g的两个函数，令其等于

$$u_\gamma(g)=\sup_{\theta\in\Gamma_g}u_\gamma(\theta);\quad v_\gamma(g)=\inf_{\theta\in\Gamma_g}v_\gamma(\theta). \tag{6.44}$$

当参数值$\theta_g'\in\Gamma_g$时，获得（6.44）式中的sup和inf值，此参数值自然应称为最不利值（对置信估计的构成来说）。

类似于一维情况，来研究函数（6.44）式的图象。在每个可能值$g=g(\theta)$时，构成函数$u_\gamma(g)$的概率$P_\theta\{T(\mathbf{x})\leq u_\gamma(g)\}$不小于$\gamma$。正是这样，事件$\{T(\mathbf{x})\geq v_\gamma(g)\}$在任意$g$时，具有不小于$\gamma$的概率。因而，最好把多维问题，归结为以前研究过的一维问题。若$u_\gamma(g)$和$v_\gamma(g)$对g不是递减的，则由方程

$$T(\mathbf{x})=u_\gamma(f_*);\quad T(\mathbf{x})=v_\gamma(f_*), \tag{6.45}$$

求出γ置信上限和下限估计。同时，应从满足（6.45）式的值中，取最小值作为f_*，取最大值作为f^*。若$u_\gamma(g)$和$v_\gamma(g)$是g的非递增函数，则从方程中求得γ置信估计为

$$T(\mathbf{x})=u_\gamma(g^*);\quad T(\mathbf{x})=v_\gamma(g_*).$$

上述方法称为一维参数简化法（或简称简化法）。

现举例说明这一方法的应用。假设必须求出，由m种部件串联系统可靠度的γ置信下限估计。设i型部件无故障工作时间分布函数是指数函数：$F_i(t)=e^{-\lambda_i t}$，$i=1,\cdots,m$，按$[N_i, B, T_i]$方案在i型部件试验，结果部件有d_i个发生故障。对于此系统来说，可靠度

$$R(t)=\exp\left\{-\sum_{i=1}^{m}\lambda_i t\right\}, \tag{6.46}$$

求出$g(\theta)=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i$的$\gamma$置信上限，其中$\theta=(\lambda_1, \cdots, \lambda_m)$，就可以获得$R(t)$的$\gamma$置信下限。有关故障的数据，可用向量$\mathbf{x}=(d_1, \cdots, d_m)$表示。取$T(\mathbf{x})$作为统计量

$$T(\mathbf{x})=\sum_{i=1}^{m}d_i/(N_iT_i) \tag{6.47}$$

是无偏估计量。由于d_i服从泊松分布，则统计量$T(\mathbf{x})$的均值和方差分别等于

$$MT=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i,\quad DT=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i/(N_iT_i). \tag{6.48}$$

从（6.46）式中得出，集合Γ_g为多面体：

$$\Gamma_g=\{\theta:\sum_{i=1}^{m}\lambda_i=g,\ \lambda_i\geq 0,\ i=1, \cdots, m\}.$$

既然统计量(6.47)是独立随机变量之和，则可使统计的分布函数以均值和方差都近似于公式（6.48)式决定的标准函数。$\theta\in\Gamma_g$时，对于正态分布，由于$MT=g$，在某些参数θ值时，

(6.48) 式中的方差最大. 因此，这些参数值θ是最不利的。

同线性函数λ一样，在某一点$\theta^{(i)}=(g\delta_{i1},\cdots,g\delta_{im})$，其中$\delta_{ii}=1$；$\delta_{ij}=0$，$j\neq i$；方差$DT$最大。因而

$$\max_{\theta\in\Gamma_g} DT=\max_{1\leqslant i\leqslant m}[g/(N_iT_i)]=g/S_0,$$

式中$S_0=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant m}N_iT_i$——在试验中获得的总工作时间最小值。

在正态近似条件下，函数 (6.44) 具有以下形式：

$$u_\gamma(g)=g+u_\gamma\sqrt{g/S_0}\ ;\ v_\gamma(g)=g-u_\gamma\sqrt{g/S_0}\ . \tag{6.49}$$

u_γ——标准正态分布的γ水平分位点。求得的函数单调增长到g。因此，根据(6.45式)可知：由 (6.49)式求出的g^*值——$g(\theta)=\sum\limits_{i=1}^{m}\lambda_i$的γ置信上限——是方程

$$T(x)=g^*-u_\gamma\sqrt{g^*/S_0} \tag{6.50}$$

的解。解关于g^*的方程 (6.50) 并不难。若令$w=\sqrt{g^*}$，则 (6.50) 是关于 w 的二次方程，其根为

$$u_\gamma/2S_0\pm\sqrt{u^2_\gamma/4S_0+T^2}\ .$$

由于$T(x)>0$，则由(6.50)式中得出，根应大于$u_\gamma\sqrt{S_0}$，且只有较大的根才满足

$$g^*=u_\gamma/2\sqrt{S_0}+\sqrt{u^2_\gamma/4S_0+T^2}\ .$$

将g^*代入 (6.46) 式中的$\sum\limits_{i=1}^{m}\lambda_i$，便得到未知的$R_*(t)$——在时间$t$内可靠度的γ置信下限。必须注意，它只是近似表达式，因为$T(x)$的分布函数与正态分布近似。

代换法 令$R(t,\mathbf{p})$——在时间t内系统的可靠度，而$\mathbf{p}=(p_1,\cdots,p_m)$——该系统部件的可靠度$p_i=p_i(t)$构成的向量。假设已获得各部件的可靠度γ置信下限估计p_{i*}，$\mathbf{p}_*=(p_{1*},\cdots,p_{m*})$。将未知概率$p_i(t)$的γ置信下限估计代入$R(t,\mathbf{p})$表达式便获得统计量$R_*(t)=R(t,\mathbf{p}_*)$，那么具有怎样的置信度才能把该统计量$R_*(t)=R(t,\mathbf{p}_*)$看作是置信下限估计呢？获得置信下限估计这一方法的好处不仅在于简单，而且在于能充分地利用部件试验的数据。只须知道$p_i(t)$的γ置信下限估计p_{i*}，而根据什么样的试验方案才能获得估计则是不重要的。由于p_{i*}是根据各种部件试验数据计算出来的，且p_{i*}是相互独立的。因此，$R_*(t)=R(t,\mathbf{p}_*)$的置信度不小于γ^m。然而，这种结论是不可信的。的确，m通常很大，则γ^m很小。若要γ^m大，就是要使γ大，使其足以接近 1，且p_{i*}值是小的，而结果$R_*(t)$的值也将是小的。帕沃洛夫在参考文献[103]中指出，假设某一统计量分布的下限为p_{i*}(具有老化和凸性质的$R(t,\mathbf{p})$以p_i的函数形式存在)时，则置信度就等于γ，而不等于γ^m。这个结论对于γ置信下限的计算是很重要的。

对较一般的问题进行研究更为方便。令$f(\theta)=f(\theta_1,\cdots,\theta_n)$——实参数$\theta_1,\cdots,\theta_n$的连续实函数。若集$\{\theta:f(\theta)\geqslant f_0\}$在任意$f_0$时，是凸集，则称函数$f(\theta)$为**拟上凸函数**；若集$\{\theta:f(\theta)\leqslant f_0\}$在任意$f_0$时是下凸集，则称函数$f(\theta)$为**拟下凸函数**(须注意，若集包含任意两点及连接两点的线段，则称此集为凸集)。

令θ_*——$\theta_*=(\theta_{1*},\cdots,\theta_{m*})$的分量$\theta_i(i=1,\cdots,m)$的γ置信下限估计；而$\theta^*$——$\theta^*=(\theta^*_1,\cdots,\theta^*_m)$的分量$\theta_i$的γ置信上限估计。$S_0$类老化分布$F(t)$的特点：$\ln F(t)$有下凸

性。引入C_0类分布函数，它包含所有$F(t)$，且对于$F(t)$和$-\ln F(t)$是下凸函数。$\xi\in S_0$或$\xi\in C_0$表示随机变量ξ的分布$F(t)$属于S_0类或C_0类。在$\gamma\geqslant 0.716$的置信估计表中，用代换法给出了帕沃洛夫所获得的结果（表6.1）。

表 6.1

$f(\theta)$	$\theta_{i*}\in S_0, i=1,\cdots,m$	$\theta_i^*\in C_0$
对θ_i单调递增，$i=1,\cdots,m$	若$f(\theta)$——拟上凸函数，则$f(\theta_*)$为$f(\theta)$的γ置信下限估计	若$f(\theta)$——拟下凸函数，则$f(\theta^*)$为$f(\theta)$的γ置信上限估计
对θ_i单调递减，$i=1,\cdots,m$	若$f(\theta)$——拟下凸函数，则$f(\theta_*)$为$f(\theta)$的γ置信下限估计	若$f(\theta)$——拟上凸函数，则$f(\theta^*)$为$f(\theta)$的γ置信上限估计

现在用串联系统无故障工作概率的γ置信下限估计的计算实例来说明代换法。设串联系统部件服从指数分布$\overline{F}_i(t)=e^{-t/\theta_i}$，$\theta_i=1/\lambda_i(i=1,\cdots,m)$——$i$型部件平均无故障工作时间。

分布函数可用参数θ表示为

$$R(t,\theta)=\exp\{-\sum_{i=1}^{m}t/\theta_i\}. \tag{6.51}$$

只要求出函数

$$f(\theta)=\sum_{i=1}^{m}t/\theta_i \tag{6.52}$$

的γ置信上限估计，就足以获得概率（6.51）的γ置信下限估计。函数（6.52）对θ_i单调递减，并作为下凸函数$t/\theta_i(i=1,\cdots,m)$之和时是拟下凸函数。

假设按$[N_i,Б,r_i]$方案对i型部件试验。按照§5.1所得出的结果，$\theta_{i*}=2S_i/\chi^2_\gamma(2r_i)$，其中$S_i$——按$[N_i,Б,r_i]$方案进行试验时，在第$r_i$次故障时刻前的总工作时间。由于$2\theta_iS_i$服从$2r_i$自由度的$\chi^2$分布，则$\theta_{i*}$服从形状参数为$r_i\geqslant 1$的$\Gamma$分布，即$\theta_{i*}\in S_0$。由表6.1知，$f^*=f(\theta_*)$为$f(\theta)$的$\gamma$置信上限估计。因而，函数（6.51）的$\gamma\geqslant 0.716$的置信下限估计为

$$R(t,\theta_*)=\exp\{-\sum_{i=1}^{m}t/\theta_{i*}\}.$$

И·Б·帕沃洛夫用下例证明的老化分布性质，是以代换法为基础的。令ξ_1和ξ_2——相互独立的非负随机变量，其分布$F_1(t)$和$F_2(t)$是老化分布；u_1，u_2——这些分布的γ水平分位点。若$\gamma\geqslant 0.716$，则存在不等式

$$P(\xi_1+\xi_2\leqslant u_1+u_2)\geqslant\gamma. \tag{6.53}$$

由于$\Lambda_i(t)$是下凸函数，则经点$t=u_i$所作的切线为

$$y_i(t)=\lambda_i(t-u_i)+\Lambda_i,$$

$\Lambda_i(t)\geqslant\widetilde{\Lambda}_i(t)=\max\{0, y_i(t)\}$，$\lambda_i=\frac{d\Lambda_i(u_i)}{du}$，$\Lambda_i=\Lambda_i(u_i)$。因此，就有

$$\widetilde{F}_i(t)=1-\exp\{-\widetilde{\Lambda}_i(t)\}\leqslant F_i(t),\quad t\geqslant b_i, \tag{6.54}$$

式中b_i用下式决定

$$b_i=u_i-\Lambda_i/\lambda_i,\quad i=1,2. \tag{6.55}$$

结果，$\widetilde{F}_i(t)$可以看作是随机变量

$$\tilde{\xi}_i = b_i + \eta_i \qquad (6.56)$$

的分布函数，其中η_i服从参数为λ_i的指数分布。从（6.54）—（6.56）式得出

$$P\{\xi_1+\xi_2 \leqslant u_1+u_2\} \geqslant P\{\tilde{\xi}_1+\tilde{\xi}_2 \leqslant u_1+u_2\}$$

$$= P\{\eta_1+\eta_2 \leqslant u_1-b_1+u_2-b_2\} = \iint\limits_{\{x_1+x_2 \leqslant c,\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0\}} \lambda_1 e^{-\lambda_1 x_1}\lambda_2 e^{-\lambda_2 x_2}\,dx_1 dx_2. \qquad (6.57)$$

式中

$$c = u_1-b_1+u_2-b_2 = \Lambda_1/\lambda_1+\Lambda_2/\lambda_2. \qquad (6.58)$$

用显式计算出（6.57）式的区间。因为，两个相互独立的指数分布随机变量η_1，η_2之和，具有概率密度

$$f_2(x) = \begin{cases} \lambda_1\lambda_2/(\lambda_1-\lambda_2)(e^{-\lambda_2 x}-e^{-\lambda_1 x}), & \lambda_1 \neq \lambda_2; \\ \lambda^2 x e^{-\lambda x}, & \lambda_1=\lambda_2=\lambda. \end{cases} \qquad (6.59)$$

在计算时，仅局限于$\Gamma_i(u_i)=\gamma$。这时$\Lambda_i=l=-\ln(1-\gamma)$。从(6.58)式中求出$c=c'=l(1/\lambda_1+1/\lambda_2)$。利用（6.59）式，可得

$$P\{\eta_1+\eta_2 \leqslant c\} = \int_0^{c'} f_2(x)\,dx = 1+\frac{\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}e^{-\lambda_1 c'}-\frac{\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2}e^{-\lambda_2 c'}$$

$$=1+\frac{\mu}{1-\mu}\exp\left\{-l-\frac{l}{\mu}\right\}-\frac{1}{1-\mu}\exp\{-\mu l-l\}. \qquad (6.60)$$

其中$\mu=\lambda_2/\lambda_1$。

若在所有$\mu(0<\mu<1(\lambda_1>\lambda_2))$时，（6.60）式的右端不小于$\gamma$，即

$$e^{-l}=1-\gamma \geqslant \frac{1}{1-\mu}\exp\{-\mu l-l\}-\frac{\mu}{1-\mu}\exp\left\{-l-\frac{l}{\mu}\right\}. \qquad (6.61)$$

由此式可解出未知数。用$e^l(1-\mu)$乘(6.61)式两端，则有

$$1-\mu \geqslant e^{-\mu l}-\mu e^{-l/\mu}.$$

此式本身与下述不等式等效

$$e^{-\mu l}-\mu e^{-l/\mu}+\mu \leqslant 1.$$

可将变量l作为参数，随着此参数的增大，函数对$\mu\in(0,1)$递减：

$$\varphi(\mu,l)=e^{-\mu l}-\mu e^{-l/\mu}+\mu.$$

当$l\approx1.258$时，则$\max\limits_{0<\mu<1}\varphi(\mu,l)=1$。因此，可假定所有的$l\geqslant1.258$，或所有的$\gamma\geqslant0.716$。对$\lambda_1=\lambda_2$的情况作类似的研究，证明未知不等式（6.53）。

已知，若$\xi_1\in S_0$和$\xi_2\in S_0$，则$\xi_1+\xi_2\in S_0$。对于任意个随机变量$\xi_i\in S_0$之和，不等式（6.53）很容易推广。用归纳法不难得到下列不等式：

$$P\{\xi_1+\cdots+\xi_m \leqslant u_1+\cdots+u_m\} \geqslant \gamma.$$

式中$F_i(u_i)\geqslant\gamma\geqslant0.716$和所有$F_i(x)(i=1,\cdots,m)$是老化分布，

信用概率法（Метод фидуциальных Вероятностей）首先，用最简单的实例来解释

信用分布（Фидуциальное распределение）的概念。设随机变量服从参数为λ的指数分布，即其分布函数$F(t,\lambda)=1-e^{-\lambda t}$。该函数是$t$和$\lambda$的函数。于是，当$t$固定之后，$F(t,\lambda)$就是参数$\lambda$的分布函数。称这种分布函数为**信用分布函数**。通常，若当某些统计量T的分布$F(t,\theta)$从0变为1时，把统计量T看作是给定t时的参数θ的信用分布函数。许多实例表明，根据信用分布，可获得关于参数θ的充分统计推断。鉴于此点，自然可望利用信用分布的概念来进行系统可靠性特征量的置信估计。

设系统可靠性特征量为函数$f(\theta)$，其中θ_i——决定第i型部件无故障工作时间分布的参数。关于i型部件的试验数据，用统计量T_i形式给出，统计量分布$F_i(t,\theta_i)$对θ从0递增到1。若获得$T_i=t_i$值时，则函数$F_i(t_i,\theta_i)$称为符合$T_i=t_i$值的信用分布函数，$i=1,\cdots,m$。这时，θ_i可看作是随机变量，当然是相互独立的随机变量。这样，θ_i值的联合信用分布由m维分布函数决定

$$\Phi(t_1,\cdots,t_m;\nu_1,\cdots,\nu_m)=\prod_{i=1}^{m}F_i(t_i,\nu_i)^*\qquad(6.62)$$

此函数可作为事件$\{\theta_1\leqslant\nu_1,\cdots,\theta_m\leqslant\nu_m\}$信用概率。把统计量$T_i=T_i(x)$的观察值$t_i$看作是函数（6.62）的参数，而把未知参数$\theta_i$看作是相互独立的随机变量。在用这一方法时，须将$g(\theta)$看作是随机变量，根据信用分布公式计算其概率用下式计算。

$$P_t(g(\theta)\leqslant g)=\int\limits_{\nu:g(\nu)\leqslant g}\prod_{i=1}^{m}d_{\nu_i}F(t_i,\nu_i),\ \mathbf{t}=(t_1,\cdots,t_m)^*$$

满足条件$P_t\{g(\theta)\leqslant g^*_\gamma\}\geqslant\gamma$，$P_t\{g_{\gamma*}\leqslant g(\theta)\}\geqslant\gamma$的值$g^*_\gamma=g^*_\gamma(\mathbf{t})$，$g_{\gamma*}=g_{\gamma*}(\mathbf{t})$，分别称之为对$g(\theta)$的$\gamma$信用上限和下限。其次，可认为$F_i(t_i,\nu_i)$对$t_i$和$\nu_i$是连续的。

这样，就会出现一个关于信用限和置信限的关系问题。怎样的置信度具有γ信用限，以及能否按部件试验结果进行系统可靠性置信估计时来利用这些信用限？由于某些原因，这一问题引起了人们的注意。首先，已知在某些实例中，γ信用限也是不错的γ置信限。其次，根据统计试验法可容易地进行γ信用限的计算。令$\{w_{i,j}\}$——相互独立的，均匀分布于[0,1]上的随机数，或由计算机产生的伪随机数，从方程$w_{ij}=F_i(t_i,\theta_{ij})$中求得$\theta_{ij}$，$j=1,\cdots,M$；用此值依次构成向量$\theta_j=(\theta_{1j},\cdots,\theta_{mj})$；$j=1,\cdots,M$，以及$g_j=g(\theta_j)$。将求得的值$g_j$排列成顺序序列$g_{(1)}\leqslant\cdots\leqslant g_{(M)}$，对$\gamma$信用下限和上限的估计得到$\widehat{g}_{\gamma*}=g_{([M(1-\gamma)])}$，$\widehat{g}^*_\gamma=g_{([M\gamma]+1)}$。

文献中引用的实例表明，在某些问题中，γ信用限具有明显小于γ的置信限。因此，仅在有限的条件下，γ信用限的利用才是可行的。在这方面帕氏洛夫曾获得了重要的结果。现在来研究获得γ置信限的方法。令B——勒贝格测度等于γ($l(B)=\gamma$)的m维立方$K_m=\{\mathbf{r}:0\leqslant r_i\leqslant1\}$的波莱尔子集，然后，再研究这些$B$集的$\mathbf{B}_0$类，对于这些集，其边界点集的勒贝格测度等于零。尤其是具有逐段光滑边界的B连通集具有这一性质。因此，$\mathbf{B}_0$类的范围是很广的。因为根据i型部件试验数据x_i而计算的统计量$T_i=T_i(x_i)$是随机变量，则$F_i=F_i(T_i(x_i),\theta_i)$也是随机变量。变量是均匀分布于[0，1]区间。因此，随机向量$\mathbf{F}=(F_1,\cdots,F_m)$服从勒贝格测度给出的$K_m$立方中的分布。因而，对于$B\in\mathbf{B}_0$，$l(B)=\gamma$

$$P_\theta\{\mathbf{F}\in B\}=l(B)=\gamma.\qquad(6.63)$$

事件$\{\mathbf{F}\in B\}$可以看作是$x=(x_1,\cdots,x_m)$(在这时$\mathbf{F}\in B$)的集合G_B。这时，(6.63)式将满足

* P_t下标t表示为固体的，下同。

(6.40) 式。即当{F∈B}时，θ的集C，构成了γ置信集$C_x=\{x:F\in B\}$。根据一般公式(6.40)和(6.41)得出：对$g(\theta)$的γ置信下限估计和上限估计

$$g_{\gamma *}(B)=\inf_{\theta\in C_x} g(\theta) 和 g^*_\gamma(B)=\sup_{\theta\in C_x} g(\theta). \tag{6.64}$$

这一对γ置信估计(6.64)属于每个选择出的$B\in \mathbf{B}_0$，$P(B)=\gamma$。

现在简要地论述参考文献[104，105]已证明了的两个结论。

1．对于任意试验结果

$$g^*_\gamma(B)\geqslant g^*_\gamma, \tag{6.65}$$

即γ信用上限g^*不大于γ置信限$g^*(B)$。

若对于任意$y^{(1)}$，$y^{(2)}$

$$f[(y^{(1)}+y^{(2)})/2]\leqslant[f(y^{(1)})+f(y^{(2)})]/2, \tag{6.66}$$

则称函数$f(y)(y=(y_1,\cdots,y_n))$，为**下凸函数**。若不等式(6.66)变为相反的不等式，则称$f(y)$为**上凸函数**。用$\theta_i=e^{z_i}$替换后，再来研究函数$\widetilde{g}(z)=g(\theta)=g(e^{z_1},\cdots,e^{z_m})$。

2．若$\widetilde{g}(z)$是z的下凸函数，则γ信用上限g^*_γ就是γ置信限。但这时的γ信用下限不是γ置信限，即其置信系数小于γ。对于上凸函数$\widetilde{g}(z)$，γ信用下限是γ置信限。

从(6.65)式可知，当γ信用上限是γ置信限时，可更好地估计$g(\theta)$。对于§6.1中所研究的大部分系统，在变换$\theta_i=\lambda_i=e^{z_i}$时，可靠度$R(t,\theta)$用下列形式表示：

$$R(t,e^{z_1},\cdots,e^{z_m})=\exp\{-\widetilde{g}(z)t\}. \tag{6.67}$$

式中$\widetilde{g}(z)$是z的下凸函数。因此(6.67)式的γ置信下限估计量可用公式$R_*(x)=\exp\{-g^*_\gamma t\}$求出，式中$g^*_\gamma$——γ信用上限。

当然，对于根据部件试验结果进行系统可靠性估计这样重要的问题，仅用两节篇幅是不可能进行充分论述的。在参考文献[44]中，对开始阶段的研究进行了充分地论述，置信区间估计的一般方法可参阅参考文献[13]。在参考文献[18，19]中，对故障数不大的情况进行了研究，对作为截尾均匀分布的γ置信区间也进行了研究。参考文献[99]中的内容也与这些问题有关。在参考文献[133]中，给出了当部件试验出现的故障数不大时，最简单系统的计算表。在参考文献[14，15]中，用各种不同的观点对简化法作了研究。在参考文献[102，103]中，对代换法作了广泛的研究。在参考文献[105]中，用一章的篇幅对此方法作了论述。

菲舍尔在参考文献[189]中，曾引用了信用概率。在参考文献[14]中，对γ信用限不是γ置信限的情况，也举例作了说明。按分量试验结果进行可靠性置信估计时应用γ信用限的问题，在这里也作了简述。上述帕沃洛夫结果，在他所著的参考文献[105]和[104]中，都有引用。置信估计和信用估计的比较分析，请参阅参考文献[147]。

根据部件无故障工作时间指数分布的假设，计算出γ置信估计，当分布实际上是老化分布的条件下，如何利用这一估计的问题，在参考文献[101]中作了论证。

串联系统可靠度(6.1)式的置信估计启发法(直接推断法——译者注)，引起了人们的注意。这一方法在洛伊德(Ллойд)和利波夫(Липов)所著参考文献[89]中作了简述。在泊松近似条件下，当试验故障数不大时所采用的这一方法，在参考文献[100]中作了详尽地论证。在苏达科夫(Судаков)所著的参考文献[134]中，得出以下结论。设$p(\gamma)=p(\gamma,a,b)$为方程

$$1-\gamma=I_{p(\gamma)}(a,b)$$

的根，式中$I_x(a,b)$——由(7.44)式决定的不完全的β函数。i型部件按[N_i，Б，T]方案进行试验，这时出现d_i个故障，$i=1,\cdots,r$。这样，对于$R(T)$——各种部件的串联系统在时间T可靠度的γ置信下限估计$R_*(T)$，不小于$P\{\gamma, N_0\hat{R}, N_0(1-\hat{R})+1\}$和不大于$P\{\gamma, N_0, N_0-[N_0(1-\hat{R})], [N_0(1-\hat{R})]+1\}$，其中$N_0=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant r} N_i$，$\hat{R}=\prod\limits_{i=1}^{r}(N_i-d_i)/N_i$。在此文中指出，部件的最小容量$N_0$，对于证明概率不小于$\gamma$的$R(T)\geqslant R_{T\gamma}$，是不可缺少的，它是根据条件$N_0\geqslant[\ln(1-\gamma)]/\ln R_{T\gamma}$求出的。在参考文献[136]中，在考虑到故障可能相关的同时，对置信估计问题进行了研究。

有关系统可靠性置信估计方法问题，在国内的著作中基本上都作了研究。在较早出版的国外著作中，值得注意的有诺伊曼所著的参考文献[208]，以及参考文献[174,179]。在参考文献[202]中，最后一章的大部分都用来论述系统可靠性置信估计问题，同时还引用了有关这一问题的国外参考书目。

第七章　产品可靠性预测概述

§7.1　产品发生故障过程的不稳定性及可靠性的特殊预测问题

产品无故障工作时间分布函数　在前面几章中，主要研究了如何用各种方法，获得关于由非绝对可靠部件构成的系统，或产品无故障工作时间的主要特征量可能值的统计结论问题。这时假设，对于所研究的同型产品，无故障工作时间是服从某分布函数 $F(t)$ 的随机变量。$F(t)$ 或者是完全未知的，或者是只知道属于某分布函数族，例如属于均值老化分布函数族。有时则假设，$F(t)$ 属于某一分布参数族，例如§4.2中所引用的某参数族。

现在，重点研究可靠性理论的基本问题之一——假设检验，即检验同型产品无故障工作时间是否服从某一分布的假设[16]。

可用一组基本参数来描述每个产品的工作能力。无论是在工作时，还是在贮存时，基本参数都在不断地变化着。通常，把基本参数的可能值域 G 分成两部分：G_1 和 G_2。若产品的一组基本参数在 G_1 中，则视其为有工作能力；若产品的一组基本参数在 G_2 中，则视其为无工作能力。在参数不断变化时，这样划分可能值域是受条件限制的。

现在来研究两状态产品：有工作能力和无工作能力。故障时刻是一组基本参数从 G_1 转变为 G_2 的时刻。当然，故障时刻不仅取决于产品本身的内部结构，还取决于外部条件。关于某型产品的故障时刻数据，一般是根据专门的可靠性试验获得的（试验方案的研究见§4.1）。试验条件包括：温度、压力、电压、频率以及负载变化幅度等等。一定的工作状态与产品工作的实际条件是相对应的。与试验条件不同，工作状态发生变化的时刻是无法预料的，且如通常所说，是无法记录的。有时不能把正在工作的产品的故障时刻，同一定的工作条件相比较。因此，以下将要研究的问题只能是：已获得试验数据和已知试验状态的关系。

假设有一批同型产品M。例如，某工厂生产的这样一批产品。给这些产品标上编号：$Я_i$——编号为 $i=1, \cdots, N$ 的产品，N——产品总数，或一批产品M的总数，α——试验状态，即应力水平。

若对产品 $Я_i$ 进行试验，则该产品在 $t_i=t_i(\alpha)$ 时刻发生故障，即由有工作能力状态变为无工作能力状态。在给产品标号时，要考虑到故障时刻与试验状态之间可能存在的相关关系。

通常，可靠性试验具有不可逆的破坏性，对产品 $Я_i$ 不必要进行两次试验，因为在这种情况下试验结果完全相同。而即使是产品可以修复（常常是更换其失效部分），而当已修复的产品与试验初期的产品不同时，也是如此。因此，从全部函数可能值 $t_i(\alpha)$ 中，仅可测量一个值，这个值与选定的试验状态 α 有关。若给定试验状态 α，且一般不再研究其它状态，则问题依然是如何论证把 $t_i=t_i(\alpha)$ 看作是随机变量的问题。在对一批M中的许多产品或甚至是全部产品的试验数据进行统计分析的基础上（根据这一分析获得一组无故障工作时间 t_1，$\cdots$，t_n），获得对这一问题的部分答案。

可靠性数学理论是以如下基本假设为基础的：同一批产品在相同状态下同时进行试验时获得的发生故障时刻t_1、…、t_n是服从同一分布函数$F(t)=P\{\tau<t\}$的相互独立的随机变量观察值。现在看来，此假设所作的最严格的假设就是：对于每一件产品发生故障的时刻服从同一分布。这是因为尽管在生产中尽可能地用各种方法制造同一型号的产品，但所生产的产品仍然是各种各样的。表现为产品的特征参数变化是彼此不同的。因此，关于故障时刻具有同一分布的假设是非常严格的。若依据某些特征参数可顺利地将一批产品N分成几组，或如统计学中所说的分成几个总体（总体的故障时刻的分布实际上是不同的），一般来说，这一假设，值得怀疑。初看起来，可用一个简单的方法来解释这一难题。假设每一产品的故障时刻分布函数$F_i(t)=P\{\tau_i<t\}$都相同。然而，这一假设就其逻辑内容来讲远非如此简单。可靠性试验具有破坏性，即一个产品只可能观察到一个故障时刻t值。那么，在"分布函数$F_i(t)$"这一概念中still应有什么涵义呢？这时就会产生一个疑问，即利用$F(t)$作为一批产品N的故障时刻分布函数是否合理。认为N很大或甚至是"无"无穷时，可把$F(t)$看作近似值，根据这一点，随机（确切地说，对于所有产品是等概率的）抽取受试产品进行试验。然而，这时却完全忽视了产品的个性，并放弃了对$F(t)$的说明这个已经提出了的问题。

现在来尽力回答这一问题。采用物理教师们所常用的教学方法，即用"麦克斯韦尔实验证明法"对物理现象作直观解释。也可以用自己的实验验证法——"可靠性实验验证法"。它的作法是在故障出现时，把每件受试产品完全恢复到最初状态。这样，借助于"可靠性实验验证法"，就"可以"多次地进行产品可靠性试验。设$t_i(k,\alpha)$——在α状态下进行k次试验时，产品N_i到发生故障前的时间。那么，什么是变量序列$t_i(1,\alpha)$、$t_i(2,\alpha)$、…呢？回答是——所有这些值彼此都是相同的，且不给出任何新值。然而，还不能急于做结论，而要对再次进行实验的条件进行研究。此序列的表示法并不能说明状态是绝对相同的，即使已获得完全恢复了的产品，要完全地再现试验状态也是不可能的，因不可能脱离外界条件。若要重复采用"可靠性实验验证法"和完全再现试验状态，则可获得$t_i(1,\alpha)=t_i(2,\alpha)=$…，而试验状态是不能完全重复的，可能结果是怎样的呢？现在用投掷硬币作比喻。每次投掷后，硬币都不改变自己的性质，所以，用任何"实验验证法"都不可能恢复这个硬币。每次投掷时，都竭力（!）再现实验条件。结果，可观察到P（正面）、Γ（反面）值的序列，通常此序列具有随机性质。因而，投掷前硬币位置的微小偏差和投掷时肌肉用力的微小偏差，都会导致产生P和Γ的随机序列。正因为如此，可以预料，在进行可靠性试验时，即使决定试验状态的外界条件变化不大，产生故障的过程仍然是不稳定的。例如，循环负载的振幅和频率的微小差异也会使受试材料中的裂纹发展不同。

其次可以假定，对已完全修复了的产品进行再次试验时，试验状态微小的差异是相互独立的。就再次再现试验状态出现的微小变化而言，关于故障过程概率特性曲线稳定性的假设也是很重要的。这些都表明，即使试验状态的微小变化，也会起到一种促使故障发生进程发生变化的随机发生器的作用。

最后得出，上述故障时刻序列$t_i(1,\alpha)$，$t_i(2,\alpha)$，…可看作是服从分布函数$F_i(t,\alpha)=P\{t_i(k,\alpha)<t\}(k=1,2,\cdots)$的独立同分布的随机变量的序列。从所有可能的分布函数$F_i(t,\alpha)$类中，有效地分离出两个极值函数。其一，可能的分布$F_i(t,\alpha)$是退化函数。这表

明，对于每个(k, t, α)都存在着，即在时刻都彼此相同$t_s(k,\alpha)=t_s(\alpha)$。与此相应，当$t<t_s(\alpha)$时，$F_s(t,\alpha)=0$；当$t=t_s(\alpha)$时，$F_s(t,\alpha)=1$。这时，试验状态的变化就不重要，而产品发生故障的时刻都为$t_s(\alpha)$。这类产品相对地称作**绝对稳定产品**。其二，对于全部产品H，$t_s(k,\alpha)$值是k或s的相同分布的随机变量。换言之，$F_s(t,\alpha)=F(t,\alpha)$，式中$F(t,\alpha)$——从H中随机抽样，并在试验状态$\alpha$下试验的产品故障时间$t$的分布函数。这类产品相对地称作**绝对不稳定产品**。当每件产品绝对不稳定时，则该批产品的故障时间服从特殊的分布。显然，对大多数产品来说，其分布函数$F(t,\alpha)$既不同于一般的分布函数，又不同于退化分布函数，而是属于二者之间的分布函数。

信息特征和特殊预测问题 上述概念实际上是以产品能完全修复的假设为基础的，那么为何说这个概念仍有实用价值呢？问题在于，对多数产品来说，其研究的目的是为了获得可靠性的特殊预测，这时，可利用无损探伤法，努力测出各种参数，按参数分类，可预先以早期故障裂纹的大小将产品分组。已获得的具体产品是接近绝对稳定产品，还是接近绝对不稳定产品，对这问题的认识对特殊预测产生很重要的影响。显然当绝对不稳定时，特殊预测问题本身是没有意义的，即不能按照某些特征量将产品按其可靠性水平分类。因为这些特征量根本不存在。换言之，在这时，是不没有可能进行特殊预测的信息参数，而所有的产品，就其本身发生故障时刻的概率特性曲线来讲，都是同类型的。当绝对稳定时，就有可能找到一些信息参数，并根据这些参数对产品可靠性进行有效的预测。在介于绝对稳定和绝对不稳定之间的中间情况下（即将$F_s(t,\alpha)$区分开，但不是完全按s区分），利用无损探伤法有某些好处。但是，预测可能会错，即错误也可能在许多研究人员未能成功地找到具体产品故障时刻预测的一种准确方法，这是因为故障过程不稳定的缘故。结果是：在测定产品任意参数时，正确地预测不可能有很高的概率，再次强调，在接近绝对不稳定的情况下，已暴露的信息参数几乎都是假的。这说明实验结果不可能再现，即在某些试验中，预测可能是良好的，而在另一些试验中可能是不好的

由此可见，每种产品的分布函数$F_s(t,\alpha)$与具体产品的可靠性预测，或与通常所说的可靠性特殊预测有密切的关系。

也可以这样形象地说明特殊预测问题。假设有一批同型产品，在不改变可靠性特征和不损坏产品的前提下，测定每件产品的任一参数。测定时，须按可靠度对产品进行排列。一般情况下，将可靠度较低的产品排列在左，而将可靠度较高的排列在右；或者把产品分成三组。将可靠度最高的产品抽出放入第一组，将较高的放入第二组，将其余的放入第三组。对于第三组的产品，或者"你们"不能区别其可靠度的高低，或者就其可靠性特征来说，"你们"认为它是该型的标准产品。"你们"将以测定可能含有（而这一点需加以论证）可靠性特征信息的产品参数作为解决问题的根据。此类参数就是通常所说的信息参数。

在进行可靠性特殊预测前，首先对信息参数的概念作比较详细的研究。假设用无损探伤方法来测定一批产品的某些特性（参数），而产品Я$_i$的参数测量值为y_{ij}，($j=1,\cdots,r$)。例如，若产品Я$_i$的某一特征没有出现，则$y_{ij}=1$；若此特征出现，则$y_{ij}=2$。

假设$F(t,\alpha|y_1,\cdots,y_r)$——以随机抽样并在状态$\alpha$下受试的其参数值为$y_{ij}=y_j$（$j=1,\cdots,r$)的产品在时刻$t$前发生故障的条件概率。现在，暂且不谈统计估计$F(t,\alpha|y_1,\cdots,y_r)$的主要困难，而利用这一条件分布函数来引入关于信息参数的初步概念

若[illegible]有意义的t值范围内某一参数y_i发生变化时，条件分布$F(t, a, y_1, \cdots, y_r)$值也随之变化，则称对应于分量$i (1 \leqslant i \leqslant r)$的参数$y_i$值为**信息参数**。反之，称为**非信息参数**。须注意，参数的信息或非信息概念可能还与其它可靠性特性(值)有关，例如平均无故障工作时间$\theta(a, y_1, \cdots, y_r)$。这时，参数对$\theta$变化的影响程度，将决定参数的信息量。若给某一组特性指标（一组参数）再补充另外一些参数而没有改变故障时刻分布函数，则称这一组指标（参数）为**一组完全的指标**。须注意，一个参数在这一组里是非信息参数，而在另一组里可能是信息参数。当一组参数中的某一参数的信息因其它参数的作用而中断（消失）时，就会出现这种信息参数丢失。

有时，要适当考虑被测参数值与故障时刻之间的相关系数。这时，无论是参数值，还是故障时刻都应看作是随机变量。可用回归法进行论证。作为一些参数与另一些参数（包括故障时刻）相互联系的数量标准，这一联系的信息指标可能是有效的。在故障时刻与某些参数值之间表现出某种关系是试验初期阶段所特有的现象。信息参数表现得越充分，则具有同样一组这种参数的产品就越接近符合绝对不稳定假设。对于一组信息特征完全已知的产品，故障时刻与另一些非信息参数的参数值之间没有相关关系。

最后，再讨论一下改变试验状态时，对信息参数稳定性的检验问题。对于接近绝对不稳定的产品，须考虑到：在状态变化不大时，信息参数可能变为信息量小的参数，也可能变为完全非信息参数。以上事实表明，目前对产生故障过程的不稳定程度的认识，还是不充分的。在这种情况下，办法只有一个，即对各种类型产品的实际物理、化学及其它过程进行深入地研究。因为这些过程是故障发展的基础。无疑，与这些过程的认识，对于提高产品质量和可靠性来说是非常有益的。在进行产品可靠性特殊预测和为提高产品可靠性和质量，而对产品生产方式作有目的的改进时，必须有一个算法系统。为此，用某些数学方法来描述信息特征是可靠性理论的最重要的课题之一。

§ [illegible].2　无故障工作时间分布函数与试验状态的相关性

换算问题　对各种条件下受试产品故障时刻的数据进行统计分析表明，无故障工作概率特性曲线，实质上取决于试验状态。用户可能在各种不同的条件下使用同一型号的产品。因此，在实践中将符合某一试验状态的可靠性特征量，换算为符合另一试验状态的可靠性特征量是一个很重要的问题。

要获得十分准确的可靠性特征量结论是很困难的，这在很大程度上是由于没有足够多的数据。简单扩大受试样本容量的方法是不现实的，同时也未必是适当的。如果有可能扩大产品可靠性的信息，就会开辟一个新的途径，即在强化状态下进行可靠性试验（加速试验）。这表明，某些试验条件的水平，实际上已超出了正常工作条件下的水平。在加速试验中，产品发生故障的过程会更快地进行。这样，就有可能在较短的时间内观测到那些在正常试验条件下需很长时间才能出现的故障。必须利用相应的方式，对加速试验时获得的故障信息进行处理（换算），以便求出在正常工作条件下产品可靠性的正确结论。这时就出现了很多问题。其一，关于加速试验应力水平的选择问题；其二，按程序改变加速试验应力水平的选择问题（动态问题）。可能的强化状态数很多。步进加速试验是特殊的加速试验，即在试验过程

中，在预先规定的各个时间间隔里用相应的应力水平进行试验。加速试验状态的选择问题是重要的：选择不当，就会出现新的故障模式，而这些故障模式在正常状态下实际是不出现的。即使为了获得所需的可靠性数据，把某些状态下的试验结果折算成另一些状态下的试验结果，也会发生问题。

最简单的折算途径：首先，在正常和强化这两个状态下进行双重试验；然后，把正常状态下试验时间同每一个加速试验时间进行比较，便构成所谓折算函数。这时，对于给定的产品来说，就会出现折算函数的不变性问题。若生产是不稳定的，则求得的折算函数将发生变化，即从这一批产品的函数变成另一批产品的函数。当然，要多次进行强化和正常状态下的双重试验来构成折算函数，实际上是不可能的。因为，要获得正常状态下最后的试验结果需要很长时间。因此，最好是找到某些有关可靠性特征量的特性，这些可靠性特征量由产品类型决定，且不大受生产不稳定性的影响，即对生产来说是不变的。在许多著作中都有对加速试验和折算函数构成方法的论述。其中比较主要的参考文献见[115,116,129]。关于В·Б·巴格多纳维丘斯（Багдонавичус）所研究的解决折算问题的有效方法[8]，在本节中将详细介绍。

首先，仔细研究构造折算函数的特殊问题。从故障过程不稳定的各种可能情况来看，绝对不稳定情况是最简单的。设用随机方式将N个绝对不稳定产品分成两组：N_H和N_ϕ。在正常和强化状态下对这两组产品分别进行试验，直到全部产品都发生故障为止。即按$[N_H, Б, N_H]$和$[N_\phi, Б, N_\phi]$方案试验（见§4.1）。令$t_1, \cdots, t_{N_H}$和$s_1, \cdots, s_{N_\phi}$——第一组和第二组产品的故障时间，构造这两组产品的无故障工作时间经验分布函数：

$$\hat{F}_H(t)=d_H(t)/N_H,\quad \hat{F}_\phi(t)=d_\phi(t)/N_\phi,$$

式中 $d_H(t)$和$d_\phi(t)$——受试产品在正常和强化状态下到时刻t前发生故障的产品数。令$\hat{t}_H(q)$——$\hat{F}_H(t)\geqslant q$的t中最小的数；同样以类似方式确定$\hat{t}_\phi(q)$。这样，q从0变到1时，点$(\hat{t}_\phi(q), \hat{t}_H(q))$给出的线符合等概率经验曲线$t_H=\hat{f}(t_\phi)$。通过相邻点$(\hat{t}_\phi(q), \hat{t}_H(q))$同直线段的连接而得到这条线（见图7.1）。当$N_H\to\infty$和$N_\phi\to\infty$时，曲线$\hat{f}(t_\phi)$与等概率曲线$f(t)$相交，即与满足关系式$F_H(t)=F_\phi(f(t))$的函数相交。函数$t_H=f(t_\phi)$给出折算关系。

必须指出，对这种折算的解释有一定的局限性。在绝对不稳定的情况下，"完全恢复"后并再次进行试验的每件产品，会给出属于相互独立随机变量的时间序列。因此，对折算的理解不应只停留在字面意义上。令s_k——在强化试验状态下产品发生第k次故障的时刻，$k=1, \cdots, N_\phi$。在这种情形下，第k个故障产品的故障时刻s_k与该产品在正常状态下发生故障的时刻$t_k=f(s_k)$一般不同。然而，$t_k'=f(s_k)$的分布函数等于$F_H(t)$。

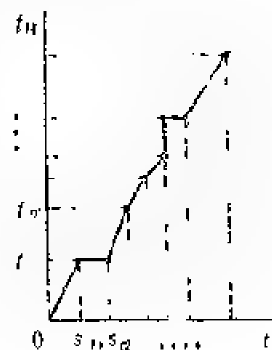


图7.1

在与绝对不稳定的不同情况下，对于整个一组信息参数值是相同的每一组产品，须以类似的方式构成折算函数。通常，对不同组产品来说，折算函数也不同。可以indexed对信息参数的计算，即使不包括整个

一组信息参数，也将减少折算函数形式对生产不稳定的依赖性。

以上根据两组产品的试验来构成折算函数的方法，在应用上是有很大局限性的。因为这只是把数据从一种状态，折算成另一种完全确定的状态。在上述一般折算问题中，曾谈到把数据很快折算成许多可能状态的问题。要解决这一问题，需要通过另一途径。这一途径可以数学模型为基础，当数学模型正确地表达了故障过程时，也就产生了所需的折算条件。

损伤可加性累积模型　若试图说明试验或工作过程中产品的"老化"现象，则最简单的假设方法就是：将逐渐增大的标量，同每件产品进行比较，并以此来证明损伤的累积。当此标量值达到某一临界界限R——产品的极限寿命时，就发生故障。关于老化的一维假设是很重要的方法，但并非对所有产品都是令人满意的近似法。

假设极限寿命R_i，≥0符合每件产品R_i。R 值构成独立同分布的随机变量序列，与绝对不稳定假设一致（§7.1）。下面将角标i删去。假设试验的状态用负载$\alpha(t)$表示，$\alpha(t)$是标量负载或向量负载，例如温度、电压等。

关于在无限小的时间间隔$(t, t+dt)$中耗损的寿命等于$r(\alpha(t))dt$的假设是以最简单的寿命耗损模型为基础的。其中$r(\alpha(t))$是自变量$\alpha(t)$的某一非负函数。

在可靠性试验方案中，假设试验状态$\alpha(t)$随时间t发生确定的变化。根据假设，在时刻t前耗损的寿命等于

$$R(t) = \int_0^t r(\alpha(s))ds, \tag{7.1}$$

故障时刻由条件

$$R = R(\tau) = \int_0^\tau r(\alpha(s))ds \tag{7.2}$$

决定。

上述故障时刻与试验状态$\alpha(t)$的相关模型，称作**损伤可加性累积模型**（AHII）。

在每个t时，（7.1）式决定了非首项泛函

$$f(t, \alpha) = \int_0^t r(\alpha(s))ds, \tag{7.3}$$

式中　α——函数$\alpha(s)$，$s \geq 0$。非首项表示：当$s \leq t$时，对于$\alpha_1(s) = \alpha_2(s)$的两个状态$\alpha_1(s)$和$\alpha_2(s)$，存在$f(t, \alpha_1) = f(t, \alpha_2)$。

若$\alpha(t) = \alpha$，则负载不随时间而变化。此类负载用A_0表示。若负载状态

$$\alpha(t) = \begin{cases} \alpha_1, t \leq t_1; \\ \alpha_2, t > t_1, \end{cases} \tag{7.4}$$

则称$\alpha(t)$为两级负载状态。当$t_1 = \infty$时，则以固定状态$\alpha(t) = \alpha$作为极限状态。由(7.4)式决定的某一状态用A 表示。在某些情况下，利用累加负载状态，这时$r(\alpha(t))$随t单调递增。电压线性增大时的电容器击穿试验就是实例。累加负载方案用A_{π}表示。

由于故障时刻$\tau = \tau(\alpha)$由(7.2)式决定，则在$R = f(t, \alpha)$和故障时刻τ时泛函的分布$f(\tau, \alpha)$决定于R的分布，因而与试验状态$\alpha(t)$无关。这表明，在状态α发生变化时，故障时刻$\tau = \tau(\alpha)$也随之变化。结果是当$t = \tau$时，$f(t, \alpha)$服从同一分布。

若给定的某产品具有损伤可加性累积模型AHII，且已知函数$r(\alpha)$，则可将无故障工作特征量，从一种试验状态折算为另一种试验状态。

令$\alpha_0(t) = \alpha_0$，A_0，其中α_0——某一额定工作状态的负载，而$r_1(\alpha$ [illegible]$), \cdots,$ [illegible]$(\alpha$ [illegible]$)$——N

个受试产品的故障时刻。将这些故障时刻作为极限寿命值，即令 $\tau_i(\alpha_0)=R_i$。这时，试验给出极限寿命分布函数的信息。为满足（7.2）式，须令$r(\alpha_0)=1$，这些都看作是正则条件。

若产品平均无故障工作时间

$$\bar{\tau}(\alpha_1)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\tau_i(\alpha_1)\text{。}$$

式中α_1表示负载值和状态，$\alpha_1(t)=\alpha_1\in A_0$，则

$$\frac{\bar{\tau}(\alpha_1)}{\bar{\tau}(\alpha_0)}\approx r(\alpha_1)\text{。}$$

于是，就获得$\alpha_1\in A_0$状态下的寿命耗损速度估计。还获得对于其它试验状态$\alpha\in A_0$下近似的估计$r(\alpha)$。可利用分位点估计代替平均$\bar{\tau}(\alpha_0)$和$\bar{\tau}(\alpha_1)$。现在暂时不去研究$r(\alpha)$的估计和损伤可加性累积模型应用的假设检验问题。因此，将认为损伤可加性累积模型是适用的，且寿命耗损速度$r(\alpha)$是已知的。现在，重点研究折算问题。

若在额定工作状态$\alpha_0\in A_0$下，极限寿命分布是均值为m_0的指数分布，则对于任意状态$\alpha_1\in A_0$，无故障工作时间分布也将是指数分布，但均值为$m_1=m_0/r(\alpha_1)$。在较广泛类的累加负载状态$r(\alpha(t))=ct^d(c>0,\ d>0)$中，都属于威布尔-格涅钦科分布。这时，从（7.2）式中得出

$$R(t)=\int_0^t cs^d\,ds=\frac{ct^{d+1}}{d+1}\text{。}\tag{7.5}$$

若$P\{R>r\}=\exp\{-(r/\sigma)^\rho\}$，则由（7.5）式可得

$$P\{\tau>t\}=P\left\{R>\frac{ct^{d+1}}{d+1}\right\}=\exp\left\{-\left(\frac{t}{\tilde{\sigma}}\right)^{\rho(d+1)}\right\}\text{。}$$

式中$\tilde{\sigma}=(\sigma(d+1)/c)^{1/(d+1)}$。这样，当累加负载为$ct^d$时，故障时刻分布函数属于威布尔——格涅钦科分布函数族。

在加速试验问题中，利用（7.4）式的多级状态进行，可靠性特征值的折算具有很大的意义。令α_1表示正常试验状态，而α_2表示强化试验状态。现在按照参考文献［4］来研究随机变量

$$\tau_1=\begin{cases}t_1, & \tau\geq t_1\\ \tau, & \tau<t_1\end{cases}\qquad \tau_2=\begin{cases}0, & \tau<t_1\text{；}\\ \tau-t_1, & \tau\geq t_1\text{。}\end{cases}$$

式中$\tau=\tau(\alpha)$——应用(7.4)式情形时的故障时刻。这样，τ_1——在负载为α_1的区间里实际无故障工作时间；而τ_2——在负载为α_2的区间里实际无故障工作时间。令$M\tau(\alpha_i)$——固定负载为α_i（$\alpha_i\in A_0$的试验）时平均无故障工作时间；而$r(\alpha_i)$——寿命耗损速度。在损伤可加性累积模型AH...中，存在

$$R=r(\alpha_1)\tau(\alpha_1),\ R=r(\alpha_2)\tau(\alpha_2)\text{，}\tag{7.6}$$

$$R=r(\alpha_1)\tau_1+r(\alpha_2)\tau_2\text{。}\tag{7.7}$$

假设R有有限均值MR，在等式（7.6）和（7.7）两端取数学期望后，求出

$$MR=r(\alpha_1)M\tau(\alpha_1),\ MR=r(\alpha_2)M\tau(\alpha_2)$$

$$MR=r(\alpha_1)M\tau_1+r(\alpha_2)M\tau_2\text{。}\tag{7.8}$$

将值$r(\alpha_1)=MR/M\tau(\alpha_1)$代入(7.8)式，求得

$$M\tau_1/M\tau(\alpha_1)+M\tau_2/M\tau(\alpha_2)=1. \quad (7.9)$$

(7.9) 式有时称为迈泽尔 (Manne…) 假设。可利用此式计算正常状态α_1下平均无故障工作时间。因此，必须利用两级负载状态下的 (7.4) 式进行试验时获得的估计$M\tau_1$和$M\tau_2$，以及利用规定负载等于$\alpha_2(\alpha_2\in A)$的状态进行试验时获得的估计$M_\tau(\alpha_2)$。可见，用损伤可加性累积模型AHП原则上可以计算均值$M\tau(\alpha_1)$，而一般不需再进行长时间的额定负载试验。

以上，总把状态$\alpha(t)$看作是已给定的时间的函数。现在，假定$\alpha(t)$以随机方式随时间t而变化的随机过程。用$F_0(x)$表示寿命R的分布。在状态已给定且等于$\alpha(t)$的条件下，产品无故障工作概率等于

$$P\{R>R(t)\}=\bar{F}_0(R(t)).$$

式中 $R(t)$——由 (7.1) 式决定的，到时刻t前耗损的寿命。按状态$\alpha(t)$的全部可能值取这一概率的平均值后，获得到时刻t无故障工作无条件概率

$$\bar{F}(t)=M_\alpha\bar{F}_0(R(t)).$$

这里M_α——关于状态$\alpha=\alpha(t)$的数学期望。

若在状态$\alpha(t)$下负载取α_1，…，α_n值是有限数，则

$$R(t)=\alpha_1S_1(t)+\cdots+\alpha_nS_n(t).$$

式中 $S_i(t)$——时刻t前在状态α_i下求得该状态的总时间。

若过程$\alpha(t)$是马尔科夫过程或半马尔科夫过程，则$S_i(t)$的联合分布，原则上可用闭运算算出，并由此求出$\bar{F}(t)$的有限表达式。由于这些公式比较繁琐，而作用又不大，所以就不再进行推导。必须注意寿命分布是指数分布的特殊情况。这时

$$\bar{F}(t)=M_\alpha\exp\left\{-\lambda\int_0^t\alpha(s)ds\right\}.$$

在给定状态$\alpha(t)$下，故障率$\lambda(t)=\lambda\alpha(t)$。

状态$\alpha(t)$是平稳随机过程，或很快地成为平稳过程，而无故障工作时间同过程的易变性相比是很长的，这是一种典型的情形。对状态$\alpha(t)$值集是离散的情况来说，最后这一点表明，在故障时刻t前的时间里，状态$\alpha(t)$发生了很大变化。假设状态$\alpha(t)$是各态历经过程，即当$t\to\infty$时，$\frac{1}{t}\int_0^t\alpha(s)ds\xrightarrow{P}a$。若寿命分布为$P\{R>t\}=\bar{F}_1(\delta t,c>0)$，式中$\bar{F}_1(t)$——已确定的函数，则在时间$t,\delta$内的无故障工作概率

$$P\{\delta>t\}=M_\alpha\bar{F}\left[\delta\int_0^t\alpha(s)ds\right].$$

由于过程$\alpha(t)$有各态历经性，则随机变量为

$$\delta\int_0^{t/\delta}\alpha(s)ds\xrightarrow{P}at, \text{当}\delta\to0\text{时}.$$

由于$\bar{F}_1(t)$在t的连续点(条件中所指的，下同)上是有界的，则

$$M_\alpha\bar{F}_1(\xi_\delta)\to\bar{F}_1(at), \quad \delta\to0\text{时}.$$

这一结果表明，当过程$\alpha(t)$是各态历经过程，并且其相应的时间同产品生存时间相比是短的，则可采用近似公式$F(t)\approx F_1(\bar{a}t)$，其中$\bar{a}$——过程$\alpha(t)$的平均值。还须注意，二值（0和1）过程的特殊情况。这可解释为工作和停工周期性地变换。这时，$\bar{a}$是产品工作时间的平均系数。

现在来研究一个实例。设某一部件有三种状况依次替换：停工（寿命耗损速度$r_1=0$，平均停工时间$T_1=20h$）；加热并检验（寿命耗损速度$r_2=1.5$，平均时间$T_2=1h$）；工作（寿命耗损速度$r_3=1$，平均时间$T_3=3h$）。假定寿命服从威布尔-格涅钦科分布

$$\bar{F}_1(t)=\exp[-(t/600)^2].$$

由于周期的平均时间为24h，而平均寿命为526h，则在这段时间里，过程$\alpha(t)$的积分均值就稳定下来：$\bar{a}=\frac{20}{24}\times 0+\frac{1}{24}\times\frac{1}{2}+\frac{3}{24}\times 1=\frac{7}{48}$，并且可利用近似公式

$$\bar{F}(t)\approx\bar{F}_1(\bar{a}t)=\exp[-(t/4114)^2]^{*}.$$

谢佳金模型（Модель Седякин）要使损伤可加性累积模型在任何时候都能完全符合可靠性试验数据是困难的。因此，必须对另一些模型进行研究，虽然这些模型比较复杂，但可以把可靠性特征量从一些试验状态折算为另一些状态。这样，在损伤可加性累积模型不合适的情况下，而可靠性数据就可能较准确地符合这些模型。根据В·Б·巴格多纳维丘斯在参考文献[3]中得出的结果，来对这些模型中的其中之一进行分析。

设$f(t,\alpha)$——由函数$\alpha(s)$，$s\leqslant t$（$\alpha(t)$对每个t都是负载）决定的对t非递减泛函。要求泛函$f(t,\alpha)$为非负项泛函。若将$f(t,\alpha)$作为以负载$\alpha(s)$试验时到时刻t前耗损的寿命，则用故障时刻τ代替自变量t，便可获得称之为极限寿命的随机变量$R=f(\tau,\alpha)$。

若对于所有负载$\alpha\in A$的极限寿命分布都是相同的，则泛函$f(t,\alpha)$称作试验状态集合A上的**联系泛函**(функционал связи)。

上述损伤可加性累积模型中的泛函（7.1）就是联系泛函。对于任意负载$\alpha\in A$，故障时刻分布函数$F(t,\alpha)$对t是非递减的连续分布函数时；当$F(0,\alpha)=0$，$F(\infty,\alpha)=1$，则函数$F(t,\alpha)$就是联系泛函的一个实例，在这种情况下，$\omega=F(\tau,\alpha)$是在[0,1]上的均匀分布随机变量，对于任意状态，$\alpha\in A$。在一般情况下，这些联系泛函实际上是不能利用的，因为对于所有状态，故障时刻分布函数$F(t,\alpha)$是假定未知的。

要考虑到这一事实：若ω均匀分布于区间[0,1]上，则随机变量$F^{-1}(\omega,\alpha)$的分布函数为$F(t,\alpha)$，在F^{-1}——函数$F(t,\alpha)$的反函数。为此，可将极限寿命同某一额定工作状态$\alpha_0\in A$联系起来。在这种情况下，须取

$$f(t,\alpha)=F^{-1}[F(t,\alpha),\alpha_0]. \tag{7.10}$$

作为联系泛函。当$\alpha=\alpha_0$时，由（7.10）式中得出，$f(t,\alpha_0)=t$，即极限寿命与故障时刻相同。于是，当用（7.10）式联系泛函给出极限寿命时，则将极限寿命解释为α_0状态下进行试验时的故障时刻。

利用联系泛函来概括损伤可加性累积模型。这样就必须研究各种形式的增长关系

* 关于$\alpha(t)$为各态历经过程的几个条件可参看有关随机过程的资料，请参阅大学教科书所写的解法。

$f(t+\Delta,\alpha)-f(t,\alpha)=\Delta_\alpha f(t,\alpha)$。若联系泛函增量在无限小的时间间隔（$t,t+dt$）中仅取决于在时刻$t$的负载$\alpha(t)$：

$$\Delta_\alpha f(t,\alpha)=r(\alpha(t))dt,\ \alpha\in A, \tag{7.11}$$

则（7.11）式属于损伤可加性累积模型。

假设，在$(t,t+dt)$中，增量仅取决于$f(t,\alpha)$和$\alpha(t)$。这表明将求得

$$\Delta_{dt}f(t,\alpha)=g(f(t,\alpha),\alpha(t)) \tag{7.12}$$

的函数$g(u,v)$。对于光滑联系泛函和光滑负载，假设增量分别取决于联系泛函和负载的导数

$$\Delta_{d}f(t,\alpha)=g\left(f(t,\alpha),\ \frac{\partial f(t,\alpha)}{\partial t},\ \cdots,\ \alpha(t),\ \cdots,\ \frac{d\alpha(t)}{dt},\ \cdots\right) \tag{7.13}$$

满足（7.11）～（7.13）式的模型即为具有局部后效的模型。当然，也可看作是具有积分后效的模型。对于这些模型，增量$\Delta_{dt}f(t,\alpha)$不仅决定于$f(t,\alpha)$、$\alpha(t)$等等，而且还决定于上述情况所决定的某些变量。例如，在所研究的模型中

$$\Delta_{dt}f(t,\alpha)=g\left(f(t,\alpha),\alpha(t),\int_0^t k(\alpha(s))ds\right), \tag{7.14}$$

式中 $k(x)$——某负载函数。关于是否有满足（7.13）或（7.14）式的联系泛函的问题，还未进行研究。模型（7.12）实际上是由谢佳金在参考文献[129]中提出的。因此，称这一模型为谢佳金模型。现在准备引用一系列谢佳金模型的研究结果，这些结果是由В·Б·巴格多纳维丘斯根据联系泛函的研究而获得的，见参考文献[3]。

现将方程（7.12）写成微分方程形式

$$df(t,\alpha)/dt=g(f(t,\alpha),\alpha(t))。 \tag{7.15}$$

其结果是，若对于所有$\alpha\in A$，满足（7.15）式的联系泛函都存在，则A上的其它任意联系泛函同样也满足（7.15）式形式的微分方程。然而，其函数可能不是$g(u,v)$，而是另一个函数$g_1(u,v)$。下面对损伤可加性累积模型作进一步的解释。对于$\alpha\in A$，只有在谢佳金模型出现和$g(u,v)=a(u)b(v)$时，即$g(u,v)$以分别决定于自变量u和v的两函数乘积形式提出时，损伤可加性累积模型才出现。现在不准备再去论证В·Б·巴格多纳维丘斯的这些结果，而仅仅是根据固定状态为A_0时联系泛函来研究较广泛的状态A_1时，联系泛函的构成问题。

假设，对于状态A（包括由（7.4）式决定的固定状态A_0和多级状态A_1）满足谢佳金模型。若已知对于固定负载$\alpha_1(t)=\alpha_1$和$\alpha_2(t)=\alpha_2$，联系泛函值为$f(t,\alpha_1)$和$f(t,\alpha_2)$，则对于由（7.4）式决定的负载$\alpha\in A_1$，已满足关系式

$$f(t,\alpha)=\begin{cases} f(t,\alpha_1),\ t<t_1; \\ f(t-t_1+t_2,\alpha_2),\ t\geqslant t_1, \end{cases} \tag{7.16}$$

式中 t_2由以下方程求得

$$f(t_1,\alpha_1)=f(t_2,\alpha_2)。 \tag{7.17}$$

以（7.16）式和（7.13）式来表示联系泛函，从而构成了由谢佳金所著参考文献[129]的基本内容。

若对于状态$\alpha\in A_0$，联系泛函是随t严格递增的，且其极限寿命变化范围是相同的，则（7.17）式的解可写作下列形式：

$$t_2=f^{-1}(f(t_1,\alpha_1),\alpha_2),\ \alpha_i\in A_0,\ i=1,2,$$

为明确起见，认为初始条件的形式为$f(0,\alpha)=0$。在时间间隔$(0,t)$里，负载状态α符合α_1，因为联系泛函是非负首项的。在时刻$t_1=t$，$f(t_1,\alpha_1)=f(t_2,\alpha_2)$。在时间间隔$(t_1,\infty)$里，即对于$t\geqslant t_1$，泛函$f(t,\alpha)$满足微分方程

$$\partial f(t,\alpha)/\partial t=g(f(t,\alpha),\alpha_2)。\tag{7.18}$$

由于在谢佳金模型中，(7.18)式的右端仅通过$f(t,\alpha)$决定于t，所以对于$t\geqslant t_1$，(7.18)式的解与方程解$\partial f(s,\alpha_2)/\partial s=g(f(s,\alpha_2),\alpha_2)$相符，式中$s=t-t_1+t_2$，而初始条件$f(s,\alpha_2)_{s=t_2}=f(t_1,\alpha_1)$。这表明，对于$t\geqslant t_1$，等式$f(t,\alpha)=f(t-t_1+t_2,\alpha_2)$已满足。因而就有了关系式(7.16)。

用类似方式可获得由以下关系式决定的多级负载α_{CT}的较一般结果

$$\alpha_{CT}(t)\begin{cases}\alpha_1,0\leqslant t\leqslant t_1;\\\alpha_2,t_1\leqslant t\leqslant t_2;\\\cdots\cdots\cdots\cdots\\\alpha_k,t_{k-1}\leqslant t\leqslant t_k。\end{cases}$$

某些α_i值可以是相同的。当$t\in[t_{i-1},t_i]$，当满足谢佳金模型时

$$f(t,\alpha_{CT})=\begin{cases}f(t,\alpha_1),0\leqslant t\leqslant t_1;\\f(t-t_1+t_1^*,\alpha_2),t_1<t\leqslant t_2,\\f(t-t_2+t^*_2,\alpha_3),t_2<t\leqslant t_3\\\cdots\cdots\cdots\cdots,\end{cases}\tag{7.19}$$

式中　$f(t_1,\alpha_1)=f(t_1^*,\alpha_2),f(t_2-t_1+t_1^*,\alpha_2)=f(t_2^*,\alpha_3),\cdots$

若对于某型产品，采用谢佳金模型，则在规定状态$\alpha_i\in A_0$，$\alpha(t)=\alpha_i(i=0,1,\cdots,m)$下进行试验，并非常精确地估计故障时刻分布函数$F(t,\alpha_i)$后，从(7.10)式中求得状态集$\{\alpha_1,\cdots,\alpha_m\}\subset A_0$的联系泛函数值。然后，利用公式(7.19)，可折算出对于任意多级负载α_{CT}的联系泛函值，此负载值与一组负载值$\alpha_0,\cdots,\alpha_m$相对应。因为对于联系泛函，极限寿命R分布对A的所有负载是相同的，所以解关于τ的方程$R=f(\tau,\alpha_{CT})$时，求得

$$\tau=f^{-1}(R,\alpha_{CT})。\tag{7.20}$$

例如，已知额定工作状态α_0下的R分布，从(7.20)式中获得对于多级状态α的故障时刻τ分布函数。在特殊情况下，对于两级负载(7.4)式可得

$$R=f(\tau_1,\alpha_1)+f(\tau_2-t_2,\alpha_2)-f(t_2,\alpha_2)。\tag{7.21}$$

式中　τ_i——负载为$\alpha(t)=\alpha_i$时，实际无故障工作时间。对于损伤线性累积模型，(7.21)式有较简单的形式

$$R=\gamma_1\tau_1+\gamma_2\tau_2。\tag{7.22}$$

因为$f(t,\alpha)=\gamma_1 t,0\leqslant t\leqslant t_1,f(t,\alpha)=\gamma_2(t-t_1+t_2),\gamma_i$——负载为$\alpha(t)=\alpha_i(i=1,2)$时寿命耗损速度。解关于故障时刻$\tau=\tau_1+\tau_2$的方程(7.22)最简便，因为$R$和$\tau$的相关关系可用倾斜角为$\varphi_1$和$\varphi_2$的直线线段和射线来表示，其斜率分别等于$\gamma_1$和$\gamma_2$(图7.2)。

已给定某类负载时，所有符合这些负载的无故障工作时间分布函数都属于同一族，这时根据公式(7.11)就不难获得联系泛函的显式。若对于状态$\alpha\in A$，$F(t,\alpha)$属于威布尔

格涅钦科族，即$F(t,\alpha)=1-\exp\{-(t/\sigma(\alpha))^{\rho(\alpha)}\}$，则根据（7.10）式，联系泛函为

$$f(t,\alpha)=[\sigma(\alpha_0)/\sigma(\alpha)^{\beta(\alpha)}]t^{\beta(\alpha)},\beta(\alpha)=\rho(\alpha)/\rho(\alpha_0).$$

若再假定满足谢佳金假设，则形状参数与状态$(\rho(\alpha)=\rho(\alpha_0))$无关，则联系泛函为

$$f(t,\alpha)=[\sigma(\alpha_0)/\sigma(\alpha)]t.$$

因而，若谢佳金模型是正确的，而故障时刻分布函数是指数函数，则损伤可加性累积模型也是正确的。

若对于负载$\alpha\in A$，故障时刻分布函数服从对数正态分布

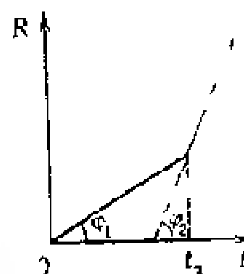


图 7.?

$$F(t,\alpha)=\Phi\left(\frac{\ln t-\mu(\alpha)}{\sigma(\alpha)}\right),\quad \Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-y^2/2}dy,$$

则根据（7.10）式，联系泛函为

$$f(t,\alpha)=\exp\left\{-\mu(\alpha)\frac{\sigma(\alpha_0)}{\sigma(\alpha_1)}+\mu(\alpha)\right\}t^{\sigma(\alpha_0)/\sigma(\alpha_1)}.$$

若对所有负载：$\sigma(\alpha)=\sigma(\alpha_0)$，参数值$\sigma(\alpha)$都是一样的，则这里的谢佳金模型与损伤可加性累积模型也是等价的。

对于其它故障时刻分布函数族，要获得类似的联系泛函表达式也并不困难

不稳定生产条件下的换算问题　极限寿命R分布形式的不断变化，使得解决上述折算问题的方法变得复杂化了。如果在相同负载条件下，对在不同时间里生产的多批同型产品进行试验时，同一状态的无故障工作时间分布函数有本质的差别，则说明生产是不稳定的。可靠性特征量的变化可能也是联系泛函变化的结果。

首先，Г·Д·卡尔塔绍夫（Карташов）和А·И·佩罗特（Перрот）在参考文献[63]中对不稳定生产条件下的折算方法做了论述，同时他们还研究了生产中的不变量。除可靠性特征量发生变化的产品之外，所有给定的各批产品都能满足的某些基本关系式，称为生产不变量。巴格多纳维丘斯在参考文献[4]中引用了下列概念。

若各批产品的极限寿命R分布和故障时刻$\tau(\alpha)$发生变化，而与此相应的联系泛函不变，则在负载$\alpha\in A$集上满足**函数遗传假设。**

联系泛函分别满足关系式（7.3）和（7.15），从而决定了损伤可加性累积模型和谢佳金模型。因而，若在负载集合A上满足函数遗传假设，则无论是损伤可加性累积模型，还是谢佳金模型都是生产不变量。

根据两个方案试验构成折算函数的特殊问题，在本节一开始就作了研究。若满足函数遗传假设，则这类折算函数是生产不变量。设$f(t,\alpha)$——在负载状态α_1和α_2下对t的单调函数的联系泛函。若$F_R(t)=P\{R\leq t\}$——极限寿命分布函数，则对随机故障时刻$\tau(\alpha_1)$和$\tau(\alpha_2)$

$$P\{\tau(\alpha_i)\leq t\}=P\{R=f(\tau(\alpha_i),\alpha_i)\leq f(t,\alpha_i)\}=F_R(f(t,\alpha_i)).$$

因而，在状态α_1和α_2下，反映相同故障概率值的时刻t_1和t_2，决定于方程

$$f(t_1,\alpha_1)=f(t_2,\alpha_2). \tag{7.23}$$

由于f对t是单调的，利用(7.23)式可求出：从状态α_2变为状态α_1的折算函数具有以下形式：

$$t_1=f^{-1}(f(t_2,\alpha_2),\alpha_1). \tag{7.24}$$

根据（7.24）式，折算函数用联系泛函定义给出。当满足函数遗传假设时，此泛函不变。因而，折算函数也是生产不变量。这一结果说明了假设是严格的，此假设正是巴格多纳维丘斯泛函遗传假设的基础。所以，对于相当广泛的不稳定生产，要使折算函数（7.24）成为不变函数，是很困难的。

卡尔塔绍夫（Карташов）和佩罗特（Перрот）对遗传假设作了一般简要论述。在时刻t进行负载α试验时，每件一定类型的产品的特点是：有一组参数$\nu(t,\alpha)=(\nu_1(t,\alpha),\cdots,\nu_k(t,\alpha))$，其中$k$可能是很大的。他们就是以此为出发点进行研究的。当给定初始值ν_0和负载α时，根据某一给定函数来决定$\nu(t,\alpha)$，$\nu(t,\alpha)=\phi(\nu_0,\alpha,t)$。根据$\nu(t,\alpha)$来确定是否有故障，即定义某些函数$\varphi$为

$$\varphi(\nu(t,\alpha))=\begin{cases}1, & 若在时刻t前发生故障；\\ 0, & 若在时刻前未发生故障。\end{cases}$$

对于不同批的产品，仅仅是开始几组参数ν_0的概率分布不同，而函数ϕ和φ仍是相同的，卡尔塔绍夫和佩罗特的遗传假设与这一情形是一致的。

谢佳金在参考文献[129]中，对加速寿命试验的理论基础展开了研究，对此研究的必要性引起了从事可靠性理论研究的科技工作者的注意。卡尔塔绍夫和佩罗特对发展折算法做出了重要的贡献。

在机械学中，在负载情况下疲劳损伤累积模型的构成问题也是具有很重要的意义，见参考文献[22,1.7]。伯拉戈维申斯奇（Благовещенский）在参考文献[22]中对一维疲劳损伤累积模型做了详尽的讨论。

由于统计结论是根据加速寿命试验数据的处理结果得出的，因此出现了新问题。巴格多纳维丘斯在参考文献[3，4]中提出了关于试验数据符合损伤可加性累积模型的假设检验准则。巴罗（Барноу）和绍伊叶尔（Шойер）在参考文献[165]中根据强化状态试验数据，对非参数分布族，尤其是S^*_0类分布（定义见§4.2）的估计问题进行了研究

第八章　描述复杂系统的多维马尔科夫过程及其统计模型法

§8·1　概　　述

目前，广泛用随机过程研究系统可靠性时，主要应用有限状态集的马尔科夫过程；其次是半马尔科夫过程。利用半马尔科夫过程描述系统功能的显著特点是：在这种系统中，在任意时刻的转移不会超过一次，转移过程的持续时间分布与指数分布相同（于是，为预测在某时刻内状态转移，必须知道在此时刻前转移过程已进行了多长时间）。例如，当一个维修工的修复时间服从任意分布时，利用有限状态集半马尔科夫过程可以描述马尔科夫故障流的系统（在很短的时间h内，故障概率等于$\lambda_k h+o(h)$，式中k——系统在此时刻的状态，在此时刻的状态同系统以前的状态无关）。

为了分析更一般情况下的系统，必须研究多维马尔科夫过程。本章阐述上述过程最一般的情形；说明借助多维马尔科夫过程怎样把可靠性工程中的实际系统变成简单而概括的公式。同时，还要指出，在多维马尔科夫模型范围内，推导系统可靠性特征量的精确公式所用的分析法效率很低。最广泛应用的是蒙特卡罗法——以随机数为基础的通用计算法。下面介绍描述系统性态的马尔科夫过程统计模型的通用算法。

§8·2　补充变量法

首先，研究最简单的例子。例如，有一部件交替处于正常与故障状态的时间为ξ、η——分布函数为$F_0(x)$、$F_1(x)$的随机变量。假设部件处于这两种状态的时间总是独立的。部件状态随时间的变化可以用二状态随机过程$\nu(t)$描述：若在时刻t部件处于正常状态，$\nu(t)=0$；否则，$\nu(t)=1$。

一般，研究者除需知道随机过程$\nu(t)$的状态以外，再不需知道系统的任何信息了。但是，在一般情况下，此过程并不是马尔科夫过程。为将此过程变为马尔科夫过程，只需引入补充变量就足够了。现介绍引入补充变量的两种方法。

1．令$\xi^*(t)$——过程$\nu(t)$从上一次跳跃时刻到时刻t的时间。如果在$(0,t)$区间没有跳跃，则$\xi^*(t)=t$。例如，已知$\nu(t)$跳跃的时刻为：$t_1=2$，$t_2=5$，$t_3=7$，$t_4=12$，…。于是，若$\xi^*(1)=1$，则$\xi^*(4)=4-t_1=2$，$\xi^*(6)=6-t_2=1$，$\xi^*(11)=11-7=4$，…。

二维随机过程$\zeta^*(t)=(\nu(t),\xi^*(t))$是马尔科夫过程。事实上，在已知$(\nu(t),\xi^*(t))=(i,x)$时，在时刻$t$后部件的性态就是过程$\nu(t)$的状态，是由跳跃时刻$t_n>t$递增的序列集合所决定。如果给出$t_n<t$，因而可求出变量$\xi^*(t)$，即

$$\xi^*(t)=\begin{cases} t, & \{t_n\le t\}=\phi;\\ t-\max\limits_{t_n<t} t_n, & 反之。\end{cases}$$

上述时间序列（t之后的全部跳跃序列）是相邻两次跳跃之间的时间 $z_1, z_2, \cdots$ 的单值函数。这样，若令γ——到 t 时刻前过程 $\nu(t)$ 的跳跃次数，则 $z_1 = t_{\gamma+1} - t$，$z_2 = t_{\gamma+2} - t_{\gamma+1}$，$z_3 = t_{\gamma+3} - t_{\gamma+2}, \cdots$。在给定条件下，随机变量 z_1 的分布为

$$P(z_1 < u \mid t, x) = \frac{F_1(u+x) - F_1(x)}{1 - F(x)},$$

亦即，在过程已持续了 x 的条件下，随机过程在跳跃时刻前的剩余时间分布，而此过程转移的总时间是分布函数为 $F_1(t)$ 的随机变量。显然，当给定 t 和 x 时，随机变量 z_1 与随机过程值的总和 $\xi^*(\tau)$ 无关（$\tau < t$）。同样，随机变量 $z_2, z_3, \cdots$ 也同总和 $\xi^*(\tau)$ 无关，随机变量 z_1 也可合并于此总和中。于是，$\xi^*(t)$——马尔科夫过程。

2. 令 $\xi(t)$——过程 $\nu(t)$ 从时刻 t 到下次跳跃前的时间（在上一段中将 $\xi(t)$ 记作 z_1）。于是，过程 $\zeta(t) = (\nu(t), \xi(t))$ 是马尔科夫过程（此过程的证明同 $\xi^*(t)$ 的证明完全相同。应注意，$\xi(t)$ 是锯齿形函数：在过程 $\nu(t)$ 跳跃的时刻 $\xi(t) = 0$；在两相邻跳跃时刻之间，该函数与坐标轴的夹角是45°的直线。

在大规模维修理论中，早就应用补充变量（如[28]等），选择的补充变量应满足以下条件：补充变量 $\xi^*(t)$ 或 $\xi(t)$ 应与大规模维修系统中的相邻状态跳跃时刻之间的时间服从同一分布。在许多文献[3],45,36,70,75]中研究了可靠性课题中应用分段线性马尔科夫过程的方案，并概括为科克斯（Кокс）法。下一节将详细介绍。

§8·3 分段线性马尔科夫过程

令 $\zeta(t)$——齐次马尔科夫过程随机变量[42]，此过程的状态为 $(z_0; z_1, \cdots, z_{k_{z_0}})$，式中 z_0——可能取值为有限集或可数集的离散分量；$z_i (i \geq 1)$——非负整数分量；k_{z_0}——z_0 的秩（给定 z_0 时的顺序分量数）。如果 $\zeta(t) = (z_0; z_1, \cdots, z_{k_{z_0}})$，则记 $\nu(t) = z_0$；$\xi_1(t) = z_1, \cdots, \xi_{k_{z_0}}(t) = z_{k_{z_0}}$。这样一来，$\zeta(t) = (\nu(t); \xi_1(t), \cdots, \xi_{|\nu(t)|}(t))$。

令 $\nu(t) = k$，$\xi_i(t) = z_i > 0$，$1 \leq i \leq |k|$。这样，在 dt 时间内，可产生过程状态自发地变化。同时

$$P\{\nu(t+dt) = l \mid \nu(t) = k, \xi_i(t) > 0, 1 \leq i \leq |k|\} = \lambda_{kl} dt.$$

如果 $\nu(t-0) = k, \nu(t+0) = l$，亦即在时刻 t，$\nu(t)$ 由 k 跳跃为 l，则 $\xi(t+0)$ 按下述方法求出。首先，求维数决定于 k、l 和多维分布函数 $H_{kl}^{(1)}(x) = H_{kl}^{(1)}(x_1, x_2, \cdots)$ 的随机变量 $\eta = (\eta_1, \eta_2, \cdots)$。建立方程

$$(\xi, \eta) = (z_1, \cdots, z_{|k|}; \eta_1, \eta_2, \cdots), \qquad (8.1)$$

于是

$$(\xi_1(t+0), \xi_2(t+0), \cdots) = (\xi, \eta) A_{kl}^{(1)}.$$

式中 $A_{kl}^{(1)}$——一定常矩阵。$\nu(t+dt) = \nu(t) = k$ 的发生概率为 $(1 - \lambda_k dt)$，式中 $\lambda_k = \sum_{l \neq k} \lambda_{kl}$；在这种情况下，$\xi_i(t+dt) = z_i - \alpha_{ki} dt$，$i \leq |k|$，式中 α_{ki}——常数。

设在某时刻 t，ξ_i 变为0，且 $\xi(t-0) = (z_1, z_2, \cdots, z_{|k|})$（因此 $z_i = 0$）。这样，$\nu(t+0)$ 可根据下式求出

$$P\{\nu(t+0) = l \mid \nu(t-0) = k, \xi_i(t-0) = 0\} = p_{kl}^{(i)}.$$

然后，求维数决定于 k、l、i 以及多维分布函数为 $H_{kl}^{(i)}(x) = H_{kl}^{(i)}(x_1, x_2, \cdots)$ 的随机变量 $\eta =$

$(\eta_1, \eta_2, \cdots)$，并构成向量(ξ, η)，与上述情况（见(8.1)式）相同。$\xi(t+0)$ $(j \geq 1)$ 由下式求出：

$$(\xi_1(t+0), \xi_2(t+0), \cdots) = (\xi\eta) A_k^{(l)},$$

式中$A_k^{(l)}$ [illegible] 定常矩阵，[illegible] 1。

不同的$\xi_j(t)$同时变为零的情况，[illegible]不研究，为了使此事件实际上有0概率，只要满足以下条件就可以了。设$\eta=(\eta_1, \eta_2, \cdots)$ [illegible] 服从多维分布函数$H_k^{(l)}(x)$的随机向量，[illegible] ≥ 1。这样，对于不同时等于0的任意一组常数c来说，随机变量$c_1\eta_1+c_2\eta_2+\cdots$是连续的。

除所描述的过程$\xi(t)$的变化规律以外，还应给出在$t=t_0$（通常$t_0=0$）时过程的初始分布。对于此分布，将不引入专门的符号。

上述随机过程叫做分段线性马尔科夫过程 [illegible]，此过程可用一组参数和分布函数来表示。

为了使分段线性马尔科夫过程的概念更加明确，同时使读者理解在可靠性分析中的应用，现在来研究此过程根据下列条件划分的特殊情形：

1. 分布为$H_k^{(l)}(x)$的随机向量维数等于1；

2. $A_k^{(l)}$——向量中除去第l个的分量为0之外的变换矩阵，其中$l \geq 1$。例如，(2,3,1,0,4)；$A_k^{(l)}=(2,3,1,4)$；

3. 分布为$H_k(x)$的随机向量维数等于0，[illegible]；

4. α [illegible] 0；

5. 存在唯一的i，使 $i=0$；在此情况下，令$i=0$。

上述分段线性马尔科夫过程的特殊情形可以解释如下。系统处于不同状态i的有限集或可数集，其中$i=0$的状态——系统所有部件都处于正常状态。如果系统在时刻t处于状态k，则在dt时间内系统以概率$\lambda_{kl}dt$向状态l转移。除0状态外，在任意状态k都必须执行与系统更新有关的某些转移，转移的次数记作 [illegible]。

如果在时刻t系统处于状态k，则记$\nu(t)=k$，同时，以$\xi_j(t)$ [illegible] 在时刻t后必须完成的工作时间。即，在时刻t前，完成了所需的第j次转移。如果$\nu(t)=k$，用α_{kj}表示在时刻t完成第j次转移的速度。因此，$\xi_j(t)=-\alpha_{kj}$，$j \geq 1$。如果$\nu(t-0)=k$，且$\xi_j(t-0)=0$，亦即，在时刻t完成第k次转移，则$\nu(t+0)$以概率p_{kl}获得新状态l，而以前的j次转移不复存在。在$\nu(t-0)=k$的条件下，在时刻t过程$\nu(t)$转移到故障状态l，增加了新的转移，完成此转移需要随机工作时间，其分布为$H_k^{(l)}(x)$；新的转移序号接续其它现有的转移序号。如果按时钟时间单位计算，则$\xi_j(t)$的意义是完成相应转移的时间。

§8.4 可靠性模型的说明

例1 由n个部件组成的系统，$\nu(t)$ [illegible] 到时刻t前有故障的部件数，假设$\nu(t)=k$，在dt时间内，一个部件发生故障的概率$\lambda_k dt$与系统以前的状态无关。设有m个维修工，其中每一个在任意时刻都只能维修一个发生故障的部件。更新时间τ [illegible] 分布函数为$H(x)$的随机变量。维修次序按发生故障的先后次序安排，即先发生故障者先维修。

描述此系统功能的分段线性马尔科夫过程是按以下方式建立的。现在来求$\nu(t)$，$\nu(t)$，

$\overline{\nu}(t)=\min\{\nu(t),m\}$。于是，在时刻$t$有$\overline{\nu}(t)$个部件在维修。$\xi_1(t),\xi_2(t),\cdots,\xi_{\overline{\nu}(t)}(t)$——到部件更新结束时刻的时间。过程$(\nu(t);\xi_1(t),\xi_2(t),\cdots,\xi_{\overline{\nu}(t)}(t))$是未知的。在这种情形下

$$\lambda_k=\begin{cases}\lambda, & i=k-1\\ 0, & i\neq k-1,\end{cases}$$

$H_{i,i+1}^{(0)}(x)=H(x)$；$A_{i,i}^{(0)}$——定常矩阵；$A_{i,i}^{(j)}$——向量中除去第i个分量外的变换矩阵；$\alpha_{i,j}=1$，$1\leqslant j\leqslant k$；$\alpha_{k,j}=0$，$j>k$。

例2 由n个不同部件组成的系统，其余情况同例1。如果在时刻t第i个部件处于正常状态，则在dt时间内此部件发生故障的概率为$\lambda_i dt$。在这种情况下，分段线性马尔科夫过程可写成

$$\zeta(t)=(\nu(t);\xi_1(t),\xi_2(t),\cdots,\xi_{\overline{\nu}(t)}(t)).$$

式中$\nu(t)=(\nu_1(t),\nu_2(t),\cdots,\nu_n(t),j_1(t),j_2(t),j_{\overline{\nu}(t)}(t))$；$\nu_i(t)$——第$i$个部件的状态变量（如果此部件是正常的，$\nu_i(t)=0$；否则，$\nu_i(t)=1$）；$j_i(t)$——在时刻$t$第$i$个部件的维修序号；$\xi_i(t)$——完成第$i$次转移的剩余时间。（同上例一样，引入变量$\overline{\nu}(t)=\min\{\nu_1(t)+\cdots+\nu_n(t),m\}$。如果$k=(\nu_1,\cdots,\nu_n;j_1,\cdots,j_{\overline{\nu}})$，$l=(\nu_1',\cdots,\nu_n';j_1',\cdots,j_{\overline{\nu}'}')$，则在$\nu_r=\nu_r'$ $(r\neq i)$，$\nu_i=0$，$\nu_i'=1$，$l=k_i+1$ $(i=j)$，$1\leqslant r\leqslant k$；$j_{r}'=i$时，$\lambda_k=\lambda_i$。在其它情形下，$\lambda_k=0$。

此过程的其它特征量计算与例相同。

例3 由n个部件组成的系统。第i个部件无故障工作时间是服从分布函数为$G_i(x)$的随机变量，其维修时间是服从分布函数为$H_i(x)$的随机变量。有m个维修工，按故障发生的次序安排维修。在这种情况下，记$\nu(t)=(\nu_1(t),\nu_2(t),\cdots,\nu_n(t))$。其中，当第$i$个部件处于正常状态时，$\nu_i(t)=0$；当其处于维修状态时，$\nu_i(t)=1$。如果在时刻$t$，按顺序维修第$i$个部件，同时占用第$r$个维修工，则$\nu_i(t)=r+1$，$r\geqslant$。令$\xi_i(t)$——当$\nu_i(t)=0$时，从时刻$t$到其发生故障时刻的时间；否则，$\xi_i(t)$是时刻$t$之后完成第$i$个部件维修的时间。过程$\xi(t)=(\nu(t);\xi_1(t),\xi_2(t),\cdots,\xi_n(t))$——没有自发地改变状态的时间。只有当变量$\xi_i(t)$的某一分量变为0的时刻，此过程才会发生跳跃。

关于过程$\zeta(t)$的瞬态特性表达式写法，将在下面和本节的实例中向读者介绍

例4 例3所研究的系统模型变化如下：用$\zeta(t)$表示二状态(0,1)的随机过程。令$\zeta(t)=1$表示在时刻t系统有维修要求；$\zeta(t)=0$表示系统无维修要求，过程$\zeta(t)$处于状态0和1的时间间隔是分布函数为$F_0(x)$和$F_1(x)$的独立随机变量。假定可靠寿命降低的速度分别为α_0、α_1。这样，部件在区间(t_1,t_2)工作的等效时间等于$\int_{t_1}^{t_2}\alpha(\zeta(t))dt$，式中$\alpha_0(0)=\alpha_0$，$\alpha(1)=\alpha_1$。当第$i$个部件工作的等效时间达到分布函数$G_i(x)$时，该部件就发生故障。

自然，分段线性马尔科夫过程

$$\xi(t)=(\nu_1(t),\cdots,\nu_n(t),\zeta(t);\xi_1(t),\cdots,\xi_n(t),\xi_{n+1}(t))$$

可与所描述的过程相提并论。式中$\nu_1(t),\cdots,\nu_n(t);\xi_1(t),\cdots,\xi_n(t)$与例3的相同；$\zeta(t)$按

上述方法求出，$\xi_{n+1}(t)$——过程$\xi(t)$从时刻t到下次跳跃的时间。应当指出，如果$\nu(t)=(\nu_1(t),\cdots,\nu_k(t),\ \zeta(t))$，则

$$\frac{d\xi_1(t)}{dt}=\begin{cases} \alpha, & \zeta(t)=0; \\ 1, & \zeta(t)=1; \\ 0, & \zeta(t)\geq 2. \end{cases}$$

应看到，在实践中，最好选择系统中实际发生转移结束前的时间作为变量$\xi(t)$：部件的维修，故障的查找、预防性检修、维修要求，以及系统状态改变的事件发生前的时间（例如，下次维修要求到来前的时间、部件发生故障前的时间等）。在方法上，适当地确定在后一情况下的虚拟转移（事件等待转移）。例如，如果有同类事件流（譬如，把进入系统的各事件视为同一事件），则可以认为在每进入一个事件时，完成一次虚拟转移，并开始下一次转移。这样一来，虚拟转移的持续时间等于流的顺序事件之间的时间。显然，从数学的观点看，实际转移与虚拟转移是相同的。

建议按下述方案建立描述系统功能的分段线性马尔科夫过程

1．确定系统不同状态的有限集或可数集Z。

2．确定系统在每一状态$k\in Z$时的转移组（实际的和虚拟的）。转移分为马尔科夫转移和非马尔科夫转移。所谓马尔科夫转移是指在区间$(t,t+dt)$中以概率λdt完成的转移，该转移与时刻t以前系统的性态无关，而λ决定于时刻t系统的状态k。这样一来，必须确定马尔科夫过程转移的强度λ。所谓非马尔科夫转移是指不具备上述特性的转移。必须指出，假如为了确定时刻t之后该转移持续了多长时间，那么转移数应包括在给定时刻实际上不能完成的转移，它是提前开始的，但尚未完成。这种情况，在排队论中花费了维修时间的优先次序优先权方案是典型的例子。

3．确定给定系统状态k时的第j次非马尔科夫转移速度α_j。

4．确定γ——工作或实现某一转移等效时间的分布概率。这里γ是指从时刻t开始到随机时刻t_1完成转移的概率，即$\int_t^{t_1}\alpha(t)dt=\gamma$，式中$\alpha(t)$——在时刻$t$完成状态转移的速度。

5．确定每一过程（马尔科夫和非马尔科夫过程）在状态转移结束时系统达到可能状态的概率分布，以及没有转移的组合。同时，还要确定完成转移的剩余工作时间与结束转移前系统状态的关系。

在完成上述步骤之后，可确定分段线性马尔科夫过程为

$$\xi(t)=(\nu(t);\xi_1(t),\cdots,\xi_{\nu}(t))。$$

式中$\nu(t)$——在时刻t系统的状态，$\nu(t)\in Z$；$\xi_j(t)$——与完成第j次非马尔科夫过程有关的剩余时间。

假设已将非马尔科夫过程变为马尔科夫过程（用虚拟相位法），如果完成某一转移的工作时间分布近似地服从埃尔朗分布，亦即，密度为

$$p(x)=\sum_{k=1}^{n}c_k\frac{\lambda^k x^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\lambda x},\quad x>0 \tag{8.2}$$

的分布，式中$c_k\geq 0$，$\sum_{k=1}^{n}c_k=1$。那么，该过程可用随机数链来代替。每一链都要用参数为

λ的指数c和代替。第r次转移的概率为c_r。此k是这样选择的：从第k次虚拟相位开始；此相位结束后，第（$k-1$）次虚拟相位开始等等。第1次虚拟相位结束的时刻，便是所有转移结束的时刻。将相位反向编号很方便，因为不需记忆总序号。

И·Н·格瓦连科在[30]中证明了，非负随机变量任意分布的精确近似解为（8.2）式。在某些条件下可以用有限r代替无限n。另一方面，А·А·鲍罗夫科夫（Боровков）在[27，28]中证明过，在大规模维修系统中，泛函广泛类分布与过程连续性的关系。

§8·5　模块化的处理方式

在§8·4中considered的实例和一般建议表明，分段线性马尔科夫过程可以描述可靠性理论中极其普遍的问题。但是，由那些实例可以看出，直接应用是很繁琐的。随着系统可能转移数的增加，随机过程$\xi(t)$的维数也增加。所以，对于稍微复杂的系统直接建立随机过程，实际上是不可能实现的。而应用Н·П·布斯连柯（Бусленко）提出的模块化法[29]，可作为解此类问题的捷径。所谓**模块化法**实际上是指将复杂系统分成若干个部件（子系统），这些部件是相互独立的互不相容的（即无公共器件），信号在各部件之间传递，可以用随机过程来描述各部件。描述某一部件的随机过程，同描述其它部件的过程无关；只有一部件接受另一部件传来的信息的时刻，该部件才根据信号改变状态。于是，在传输信号的不连续时刻部件之间发生关系。

分段线性部件的概念引自[71]（也可参考[30,75]）。所谓分段线性部件（以后简称部件）是指在任意时刻t由状态$z(t)$（内部状态）所描述的既能接受输入信号x，又能输出信号y的模块，它具有输入和输出端。若已知在区间（t，$t+dt$）里没有信号到达，这样在此区间，在统计上函数$z(t)$等于分段线性马尔科夫过程$\xi(x)$。输入和输出信号分别为$x=(x_0, x_1, \cdots, x_{|x|})$，$y=(y_0, y_1, \cdots, y_{|y_0|})$。式中$x_0$和$y_0$——可能的有限集或可数集的离散分量；当$j>1$时，$x_j$和$y_j$——信号的补充分量。

设$z(t-0)=(k; z_1, \cdots, z_{|k|})$和在时刻$t$有信号$x=(r; x_1, \cdots, x_{|r|})$到来。于是，根据$P(\nu(t+0)=l \mid \nu(t-0)=k, r)=p_{kr l}$确定$\nu(t+0)$；维数取决于$k, r, l$和多维分布$H_{krl}(x)=H_{krl}(x_1, x_2, \cdots)$的随机向量$\eta=(\eta_1, \eta_2, \cdots)$；然后，建立向量

$$(\xi x \eta)=(z_1, \cdots, z_{|k|}; x_1, \cdots, x_{|r|}; \eta_1, \eta_2, \cdots).$$

根据此向量，确定在时刻$t+0$的补充变量

$$(\xi_1(t+0), \xi_2(t+0), \cdots)=(\xi x \eta) A_{krl}.$$

式中　A_{krl}——定常矩阵。

部件的输出信号是按下述方法形成的。如果在时刻t　$\nu(t)$由状态k向l自发地转移，则在保持条件（k, l）$\in Z$，时（式中Z——某一定常集），加到输出端一信号$y=(r; y_1, \cdots y_{|r|})$，式中

$$(y_1, \cdots, y_{|r|})=(\xi \eta) B_{kl}^{0}.$$

（B_{kl}^{0}——定常矩阵）。如果$\nu(t)$由k向l转移（若$(k, l) \in Z$），与变量$\xi_i(t)$变为0有关，则信号以离散分量j输出。信号的数字分量决定于关系式

$$(y_1, y_2, \cdots)=(\xi \eta) B_{kl}.$$

如果$\nu(t)$由状态转移$((k_{\cdot\cdot})$ $Z_{\cdot\cdot}$)与信号$x=(z, x_{\cdot}, \cdots, x_{\cdot})$的到达有关，则信号以离散分量$\eta$输出，信号的补充分量决定于关系式

$$(y_1, y_2, \cdots) = (\xi x \eta) B_{\cdot\cdot},$$

这里$Z_{\cdot}^{\cdot\cdot}, Z_{\cdot\cdot}$——给定集；$B_k^{\cdot}, B_{\cdot\cdot}$——定常矩阵。

此定义中的向量η在必要的时刻取值与过程以前的性态无关。而只与过程分布中的下标参数有关。如果有任意个部件有限集，则将一些部件的输出端与另一些部件的输入端连接后变成新部件。同时，可选择查找输出信号地址的某一方法。可能的方法之一是部件的输入端与输出端呈现一些路，在一定路所产生的信号向固定的地址输出，或向一些固定的地址输出。查找地址的具体方法决定了所解决的问题类型。没有输入端的部件叫做独立部件。如果在大规模维修系统中，所有的要求流是由系统内部产生的，亦即，看作是系统中所包含的部件输出信号序列，则得到独立部件。显然，独立部件的性态可用分段线性马尔科夫过程来描述。

还有一点要说明，在建立复杂系统理论时，确定部件工作时间会碰到两个困难。一是可能产生瞬时反馈：当一部件输出信号时，而同时在该时刻另一部件向该部件输入信号。克服这个困难的方法是人工随时分离信号，亦即给出调整同时到达信号的算法。另一困难是在有限时间内可能产生无限多个信号。

为了保持部件概念的严格性，现在来确定部件的过程$\nu(t)$到首次跳跃时刻t^*前的生存时间（因而在任一区间(t_0, t^*)里，除了在t^*点之外，$\nu(t)$只出现有限次跳跃）。t^*可以是有限的，也可以是无限的（视情形而定）。

任意部件都可以是由下列基本元件组成的[30]。

1．存贮元件——能贮存一定数量或不大于可数集信息的元件。如果此元件输入端有信号$(1, x)$，则在下一输入信号到达时刻前该元件的信息仍为x。如果元件在状态0时输入端有信号x，则立即将信号x输给输出端，而部件内部状态不变。

2．延迟元件——在任意时刻t，该元件处于非负值状态$z(t)$而接受信号。如果在区间(τ_1, τ_2)没有信号输入，$z(t)$就以单位速度减少，一直到达0为止。在此时刻，有以固定值的信号加到输入端，且在下一信号输入之前，元件仍保持0状态。元件能根据特殊的输入信号进入指定的状态。例如根据"询问"，在给定时刻元件发出其状态的信号。

3．瞬时分段线性随机变换器——用之变换元件状态和过程$\nu(t)$状态跳跃时刻信号，以及输入和输出信号的装置。

当用于复杂系统可靠性课题中时，最好应用一维元件作为基本元件，这是上述规定的分段线性部件的特殊情形。然而，为了容易理解起见，现给出一维部件的定义。

所谓一维部件是指在任意时刻t，由状态$z(t)$（内部的）所表示的模块，它能接收输入信号x和输送输出信号y。部件的可能状态z，以及输入信号x，记作(z, x)，其中z——有限集或可数集的部件状态；x——数字信号。为使形式划一起见，约定以$(z, 0)$代替z。于是，状态和信号就可用离散数字分量表示为向量$z(t)=(\nu(t), \xi(t))$。

令$\nu(t)=k, \xi(t)=z$，在$(t, t+dt)$内，部件输入端无信号。于是，在$(t, t+dt)$内，部件状态可能产生自发地改变，其概率为$P(\nu(t+dt)=l \mid \nu(t)=k)=\lambda_{kl} dt$。如果$\nu(t-0)=k$，$\nu(t+0)=l$，亦即在时刻$t$自发地产生跳跃，则所求的分布函数为$H_{kl}^{z}(x)$的随机变量$\eta$

的数字分 新值为

$$\xi(t) \quad , \quad \alpha_k \quad z \quad \eta, \tag{8.3}$$

式中α、η 常数，自发地保持状态不变的概率为$1-\lambda_k dt$（其中$\lambda_k=\sum\lambda_{k,l}$）；在这种情况下，$\nu(t+dt)=\nu(t)=k$，$\xi(t+dt)=\xi(t)-\alpha_k dt$，式中$\alpha_k$——任意符号的常数。

令在某时刻t补充变量$\xi(t)$变为0，且$\nu(t-0)=k$，$\xi(t-0)=0$。于是，$\nu(t+0)$的概率可用下式求出

$P\{\nu(t+0)=l \mid \nu(t-0)=k, \xi(t-0)=0, x(\tau) \ldots\} = p_{k,l}$。

因之，分布函数为$H_{k,l}(x)$的随机变量η就可求出来了。并可求出

$$\xi(t+0) \quad \alpha_k \quad z+\eta, \tag{8.4}$$

令$x(t-0)=(k,z)$，在时刻t部件输入端有信号(i,x)。于是，$\nu(t+0)$依下式求出

$P\{\nu(t+0)=l \mid \nu(t-0)=k, x(t)\} = p_{k,l}$。

分布函数为$H_{k,l}(x)$的随机变量η的取值由下式解出

$$\xi(t+0)=\alpha_{k,l}z+\eta, \tag{8.5}$$

式中$\alpha_{k,l}$——常数

一维部件输出信号的形成如下：如果$x(t-0)=(k,z)$，并在时刻t发生$\nu(t)$向l的自发转移，且η——(8.3)式中的随机变量，则当满足条件$(k,l) \in Z$时（Z——给定集），就会向部件的输出端发送信号(j,y)，式中$y=b_k^0 z+\eta$，b_k——常数。如果$\nu(t)$由k向l转移与变量$\xi(t)$变为0有关，则离散分量为l的输出信号发送条件为$(k,l) \in Z$，而补充变量决定于关系式$y=b_k^1\eta$。

当有输入信号(i,x)到达时，给定条件和关系式可由下式代替，

$(k,i,l) \in Z$，　　$y=b_k^0 z+b_k^1(x)+b_k^2\eta$。

式中Z——给定集；b_k^s，$s=0,1,2$——给定常数；z——$\nu(t)$在时刻t由k向l转移前的时间$\xi(t)$值；η——(8.4)和(8.5)式上提过的随机变量

可见，一维部件的特征量有：离散分量$\nu(t)$值，输入和输出信号值所属的各集，状态自发转移强度λ_k，转移概率$p_{k,l}$和$p_{k,i,l}$，补充变量，降低速度α_k，以及决定$\xi(t)$改变的和部件输出信号集、系数集和一维分布集。

必须指出，任意分段线性部件不能直接转变为一维部件的叠加。但是，在建立实际系统的数学模型时，用一维部件是极其方便的。下一节将提出一些相应的建议。

§8.6 系统模块化的模型

现在来阐述以一维部件为基础，建立复杂系统模型的通用方法。

在研究系统之前，首先要确定系统的组成部分。亦即，将系统划分成互不相容的部件，把每个部件都可看作是一维部件来研究。在时刻t一维部件的状态用向量$(\nu(t),\xi(t))$表示，式中$\nu(t)$——部件技术状态和使用状况的离散分量。譬如，在时刻t部件处于正常状态时，$\nu(t)=0$；处于故障状态时，$\nu(t)=1$；$\xi(t)$——状态$\nu(t)$的剩余寿命（当寿命耗尽时，$\xi(t)=0$，此时部件脱离原来的状态）。状态$\nu(t)$应选择得能唯一地确定寿命降低的速度，即据$\nu(t)$。例如，当部件在额定负载下工作时，此速度等于α_0；当部件在空载时，此速度等

了0；当部件在部分负载下工作（降额贮备）时，其速度等于$\theta\alpha_0$，$0<\theta<1$。

于是，系统的部件可用一维部件来描述。其次，一维部件可根据系统中产生的维修要求安排维修。当确定所需的一维部件数时，要尽可能按照需要配备；当部件无维修要求时，则其处于不变的"消极"状态。

维修要求可来自系统内部，也可来自外部。部件的维修要求就是来自前者。维修工也可用一维部件来描述，这要考虑到一维部件本身的故障。

最后，在建立系统模型时，还应考虑到维修策略（维修顺序的编号、选择等）。为此，需要有一个或几个部件状态的信息存贮器；根据信息存贮器内状态采取适当的措施。例如，根据维修要求确定维修工。

下面，讨论系统的部件状态转移与系统状态转移时信息交换问题的描述方法。当部件传出状态转移信号（可能要经过信息存贮器）时，信息是由前一部件传给后一部件。在信号作用下进行维修；当部件维修好后，就由后一部件向前一部件发送系统的部件状态转移的信号。在后一情况下，信号只发送到与这次转移过程有关的部件。

在建立系统模型时，除要直接再现系统中每项工作的部件外，还必须有反映每项工作质量泛函的存贮器。这样，就需要测量过程处于给定状态集的总时间、进入该集的状态数，以及在给定时间里某一变量的最大值等等。一般，这种存贮器叫一维部件。例如，在区间$(0,t)$中，系统处于故障状态集A的时间$\gamma(t)$决定于一维部件故障累积时间。一维部件的可能状态为$(0,x)$、$(1,x)$，其中，$x\geq 0$。在$t=0$时，如果系统的状态集为A，部件的状态是$(1,0)$，反之，是$(0,0)$。当系统进入和退出状态集A时，都会有转移的离散分量和不变的补充分量信息送至部件的输入端。如果$\xi(t)$——时刻t补充分量值，则在离散分量分别等于0和1的时间间隔里$d\xi(t)/dt=0$和$d\xi(t)/dt=1$。不难看出，永远是$\xi(t)=\gamma(t)$。

部件计数器　用集$N=\{0,1,2,\cdots\}$表示部件的状态。顺序事件的信号使此部件由状态n向$n+1$转移。

再来讨论在区间$(0,t)$上建立转移分量$\zeta(t)$最大值$\eta(t)=\max_{0\leq s\leq t}\zeta(s)$的部件。为完成此项任务，就要有瞬时状态为$(\nu(t),\zeta(t),\eta(t))$和$(\nu(t),\zeta(t),\xi(t))$（其中$\xi(t)=\eta(t)-\zeta(t)$）的两个一维部件。变量$\nu(t)=(\sigma(t),\tau(t))$，式中$\sigma(t)$——决定$\zeta(t)$变化速度的变量；当$\zeta(t)>0$时，$\sigma(t)=1$，当$\zeta(t)=0$时，$\sigma(t)=0$。如果$\xi(t)=0$，则$\zeta'(t)=0$，$\eta'(t)=\alpha_{\nu(t)}$。其中当$\nu(t)$给定时，$\alpha_{\nu(t)}=\zeta'(t)$。如果$\xi(t)>0$，则$\eta'(t)=0$，$\zeta'(t)=\alpha_{\nu(t)}$。为完全确定由两个一维部件组成的系统的状态，只需确定在$\xi(t)$变为0的时刻由第二个部件向第一个部件发送的信号，以及确定$\zeta(t)$以同一速度转移的时刻加到两个部件的输入端的信号就可以了。

§8·7　系统的分步模块化

假设由相应一维部件$\Pi_1,\Pi_2,\cdots,\Pi_n$所表示的系统，其状态为$(\nu_1(t),\xi_1(t)),(\nu_2(t),\xi_2(t)),\cdots,(\nu_n(t),\xi_n(t))$。又设此系统是孤立系统，亦即系统中没有来自外部的信号。在初始时刻$t=0$，每个部件依某分布随机地选择其状态。采用下列条件：在给定时间区间内，信号同时进入几个部件输入端的概率等于零（换言之，应排除§8·5段所描述的可能，即排除信号同时既有离合和有交换……）；$t_k,k\geq 1$——有序增长的时间序列集，即任一部件

都改变其离散状态。为了形式上划一起见，令 $t_0=0$，并记 $\zeta_{kn}=(\nu_{kn},\xi_{kn})=(\nu_k(t_n-0),\xi_k(t_n-0))$，$1\leqslant k\leqslant N$，$n\geqslant 1$；$\zeta^+_{kn}=(\nu^+_{kn},\xi^+_{kn})=(\nu_k(t_n+0),\xi_k(t_n+0))$，$1\leqslant k\leqslant N$，$n\geqslant 0$。所有随机序列 $\{t_n\}$，$\{\zeta_n\}$ 和 $\{\zeta^+_n\}$ 的总合能决定过程的轨迹 $\zeta_k(t)=(\nu_k(t),\xi_k(t))$。实际上，在时刻 t_n 间的区间上状态变量 $\nu_k(t)$ 是不变的；而 $\xi_k(t)$ 按线性规律变化。所以，对不属于 $\{t_n\}$ 的任意时刻 $t>0$，在确定对应 $t_n<t$ 的最大 n 为 $n(t)$ 后，便得

$$\nu_k(t)=\nu^+_{kn(t)},\quad \xi_k(t)=\xi^+_{kn(t)}-a_{k\nu^+_{kn(t)}}(t-t_{n(t)}).$$

式中 a_{kj}——当 $\nu_k(t)=j$ 时，$\xi_k(t)$ 变小的速度。

上述观点说明，为了使过程 $\zeta_k(t)$ $(1\leqslant k\leqslant N)$ 观察值再现，只要能模拟序列 $\{t_n\}$，$\{\zeta_{kn}\}$，$\{\zeta^+_{kn}\}$ 就可以了。这里对这种模型（自然，称之为分步模块法）加以说明。如上所述，变量 ζ^+_{k0} 可看作是给定的（即，服从已知分布的随机变量的观察值）。

现在证明，由 ζ_{kn} 向 ζ^+_{kn}，由 t_n，ζ^+_{kn} 向 t_{n+1} 和 $\zeta_{k,n+1}$ 的转移。设已知 ζ_{kn} 和 ζ^+_{kn} $(1\leqslant k\leqslant N)$，且在时刻 t_n 以后过程 $\nu_k(t)$ 的状态没有自发地变化。于是，在时刻 $t_n+\xi^+_{kn}/a_k$，$\xi_k(t)$ 变为 0。式中 $a_k=a_{k\nu^+_{kn}}$。记

$$t^*_{n+1}=\min_{1\leqslant k\leqslant N}(t_n+\xi^+_{kn}/a_k),\quad k^*_{n+1}=\arg\min(t_n+\xi^+_{kn}/a_k).$$

λ_{kj}——在时刻 t 过程 $\nu_k(t)$ 自发地由 k 变为 j 的强度。于是随机变量 γ 服从参数为 $\lambda=\sum_{k=1}^{N}\lambda_{k\nu^+_{kn}}$ 的指数分布。当 $\gamma<t^*_{n+1}-t_n$，则令 $t_{n+1}=t_n+\gamma$，$\nu_{k,n+1}=\nu^+_{kn}$，$\xi_{k,n+1}=\xi^+_{kn}-a_k(t_{n+1}-t_n)$，$1\leqslant k\leqslant N$。在时刻 t_{n+1} 状态自发地转移的部件序号依概率选择：选择第 k 个部件的概率等于 $\lambda_{k\nu^+_{kn}}/\lambda$。然后，此部件的状态转移要按照一维部件的定义，选择其输出信号，改变此信号输入的部件状态等等。为了显示随机变量的观察值，要利用随机数传感器。这样一来，便得到由 $\zeta_{k,n+1}$ 向 $\zeta^+_{k,n+1}$ 的转移。当 $\gamma>t^*_{n+1}-t_n$ 时，则令 $t_{n+1}=t^*_{n+1}$。同用上述方法一样求出变量 $\nu_{k,n+1}$ 和 $\xi_{k,n+1}$，按照补充分量变为 0 时一维部件状态变化的定义，实现由 $\zeta_{k,n+1}$ 向 $\zeta^+_{k,n+1}$ 的转移。此时部件的状态同样改变，在时刻 t_{n+1} 有信号送至此部件的输入端，……。

当固定 $n=n_0$ 时，当首次出现 n 使 $t_n>T$ 的时刻，或者当给定的某一随机事件首次到达条件 $(n,t_n,\zeta_n,\zeta^+_n)\in R$（$R$——给定集）的时刻（显然，这种情况包含了前两种情况），应用分步模块法的步骤就结束了。

§8·8 有更新时间的模型

现在来研究描述系统性态的再生过程 $\zeta(t)$。在某一概率空间 $(\Omega,\mathfrak{A},P)$ 中确定两独立随机变量 $\eta_0(t)=\eta_0(t,\omega)$，$0\leqslant t\leqslant\tau_0(\omega)$；$\eta(t)=\eta(t,\omega)$，$0\leqslant t\leqslant\tau(\omega)$。式中 $\tau_0(\omega)$、$\tau(\omega)$——在给定的随机时间区间里的随机变量。令 $\omega_0,\omega_1,\omega_2,\cdots$——在概率空间中随机变量 ω 的独立观察值。下面分别来求 $\eta_0(t,\omega)$ 和 $\eta(t,\omega)$ 的观察值，亦即 $\eta_0(t,\omega_0)$，$\eta(t,\omega_1)$，$\eta(t,\omega_2)$，…。我们利用所建立的观察值的序列，求再生随机过程 $\zeta(t)$：

$$\zeta(t)=\eta_0(t,\omega_0),\qquad 0\leqslant t<\tau_0(\omega_0);$$

$$\zeta(t)=\eta(t-\tau_0(\omega_0),\omega_1),\qquad \tau_0(\omega_0)\leqslant t<\tau_0(\omega_0)+\tau(\omega_1);$$

$$\cdots$$

$$\zeta(t)=\eta(t-(\tau_0(\omega_0)+\tau(\omega_1)+\cdots+\tau(\omega_{n-1})),\omega_n)$$

$$当\quad \tau_0(\omega_0)+\tau(\omega_1)+\cdots+\tau(\omega_{n-1})\leqslant t<\tau(\omega_0)+\tau(\omega_1)+\cdots+\tau(\omega_n),\quad n\geqslant 1.$$

时刻$\tau_0(\omega_0)$，$\tau_0(\omega_0)+\tau(\omega_1)$，…，$\tau_0(\omega_0)+\tau(\omega_1)+\cdots+\tau(\omega_n)$叫做再生过程$\xi(t)$的更新时刻。在这些时刻，过程$\xi(t)$的所有统计特性是更新的。更新过程以前经历的状态已不存在。

如果过程$\xi(t)$是更新过程，则可在统计上建立过程模型的更精确算法。确定再生过程特征量的一般步骤如下：

设要求估计过程$\xi(t)$的某一特征量Φ。要建立Φ的精确公式或近似公式可以用独立随机过程$\eta(t)$，$0\leqslant t<\tau(\omega)$[有时用$\eta_0(t)$，$0\leqslant t<\tau_0(\omega)$]的一组特征量$\Phi_1,\cdots,\Phi_n$表示函数$\Phi$：$\Phi=\Phi(\Phi_1,\cdots,\Phi_n)$。对于$\Phi_1,\cdots,\Phi_n$来说，可建立统计估计或置信估计。为此，需要很多的随机过程$\eta(t)$的观察值，$0\leqslant t<\tau(\omega)$。[有时可以是$\eta_0(t)$，$0\leqslant t<\tau_0(\omega)$]。在求出的估计（置信区间）的基础上，便得到$\Phi$相对应的估计。下面研究一些最重要的情形。

1．Φ——从给定状态集A中求出随机过程$\xi(t)$的平稳概率。现在求随机变量$\tau_A=\tau_A(\omega)$——随机过程$\eta(t,\omega)(0\leqslant t<\tau(\omega))$处于故障状态集A的总时间。于是，由再生过程理论[78]可得出结论

$$\Phi=M\tau_A(\omega)/M\tau(\omega).\tag{8.6}$$

这里假定$M\tau(\omega)$是有限数。

令t_n和T_n分别表示这两个变量$\tau_A(\omega)$和$\tau(\omega)$的独立的顺序值。显然，在$M\tau^2(\omega)<\infty$的条件下，统计量

$$\theta_n=\bar{t}_n/\bar{T}_n$$

是特征量Φ的估计。式中$\bar{t}_n=(t_1+\cdots+t_n)/n$；$\bar{T}_n=(T_1+\cdots+T_n)/n$。

下面证明此估计的渐近正态性。为了简单起见，令$t=M\tau_A(\omega)$，$T=M\tau(\omega)$；假设当$t>0$时，随机变量$\tau_A(\omega)/t-\tau(\omega)/T$依概率不等于0。即

$$\theta_n=\frac{t+(\bar{t}_n-t)}{T+(\bar{T}_n-T)}=\frac{t}{T}\left[1+\frac{\bar{t}_n-t}{t}-\frac{\bar{T}_n-T}{T}+o((\bar{t}_n-t)^2)+o((\bar{T}_n-T)^2)\right].$$

式中$(\bar{t}_n-t)/t-(\bar{T}_n-T)/T$——均值为0，方差为$\sigma^2/n$的渐近正态随机变量表达式。其中，$\sigma^2=D[\tau_A(\omega)/t-\tau(\omega)/T]>0$。因为$\bar{t}_n-t$和$\bar{T}_n-T$也是均值为0，方差为$1/n$的渐近正态变量，所以渐近依概率存在$o((\bar{t}_n-t)^2)$和$o((\bar{T}_n-T)^2)=o(1/n)$。至此，所提的要求证毕。

若利用已知的统计程序，可以建立特征量Φ的渐近非参数置信区间。但是，这种大样本抽样理论，只有当t和$T-t$同T可比的情况下，或者之，被估计的Φ的概率既不近似为0，也不近似为1，才是适宜的。在用之估计可靠性时，有重要意义的正是这种特殊情况——系统进入故障状态集的概率相当精确的估计。

对Φ统计估计要求的定性描述如下。令$\hat{\Phi}$——Φ的估计。通常，Φ——系统进入一定"危险"状态集或"事故"状态集的概率。此概率的估计值不应过高。亦即$\hat{\Phi}/\Phi$不应比1大得多。而错误地把Φ估计得太高的可能性很小，而且并不很危险，这样一来，从实际要求来看，不要

使Φ的估计$\hat{\Phi}$过高，譬如可以写成：$P(\hat{\Phi}>1.1\Phi)\leqslant 0.1$（当然，在具体问题中可用1.2、0.2、或1.05、0.05代替1.1、0.1。但，在本质上这些数分别与1和0都有偏差——“平均”数）。另方面，将Φ估计得过低会导致极坏的结果。例如，令部件故障概率$\Phi=10^{-4}$，由n个部件组成的并联电路的故障概率等于10^{-4n}。如果部件的故障概率增加10%，则当$n=8$时电路的故障概率就增大一倍以上。因此，不等式$\hat{\Phi}\geqslant\Phi$是满足需要的；而出现相反的不等式的概率应很小。为说明此论点，可以认为对于设计一次使用的独一无二的装置，此装置的经验故障概率可用概率$\hat{\Phi}\geqslant\Phi$估计或概率上下限来估计。在这种情形下，可以把统计估计误差看作是实际装置的故障一样。

综上所述，可提出建立对Φ的估计$\hat{\Phi}$的任务

$$P(\hat{\Phi}>(1+\delta)\Phi)\leqslant\delta_1;\quad P(\hat{\Phi}<\Phi)\leqslant\delta_0.$$

式中δ、δ_0和δ_1——给定的小参数。δ_1比δ和δ_0小得多。为了解决这个问题，只要建立能满足下列条件的$\hat{\tau}_A$和$\hat{\tau}$的估计就行了。

$$P(\hat{\tau}_A<M\tau_A(\omega))\leqslant\delta_1/2;\quad P(\hat{\tau}_A>(1+\delta/2)M\tau_A(\omega))\leqslant\delta_0/2; \tag{8.7}$$

$$P(\hat{\tau}>M\tau(\omega))\leqslant\delta_1/2;\quad P(\hat{\tau}<(1-\delta/2(1+\delta))M\tau(\omega))\leqslant\delta_0/2. \tag{8.8}$$

$\hat{\tau}_A$的估计将在下一章介绍。满足式（8.7）、（8.8）条件的估计$\hat{\tau}$用下述形式建立。

设已知不等式

$$P(\tau(\omega)>x)\leqslant\Psi(x),\ M\tau(\omega)>c>0. \tag{8.9}$$

式中$\Psi(x)$——在$(0,\infty)$上可积分的函数。

取某一数$a>0$，对随机变量$\tau(\omega)$进行独立观察得$\tau_1,\tau_2,\cdots$，并计算$\tau_n(a)=\min\{\tau_n,a\}$，$n\geqslant1$。显然，$0\leqslant\tau_n(a)\leqslant a$，记$\xi_n=\tau_n(a)-M\tau_n(a)$，$n\geqslant1$。于是

$$Me^{z\xi_n}=1+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{z^k}{k!}M\xi_n^k\leqslant e^{za}-za,\quad n\geqslant1.$$

显然，对于任意$z>0$

$$P(\xi_1+\cdots+\xi_n>x)\leqslant e^{-zx}(e^{za}-za)^n. \tag{8.10}$$

依公式

$$\hat{\tau}=(1-\gamma)(\tau_1(a)+\cdots+\tau_n(a))/n. \tag{8.11}$$

求出$\hat{\tau}$。式中γ——相当小的正数。于是，由（8.10）知

$$P(\hat{\tau}>M\tau(\omega))=P\left(\sum_{k=1}^{n}\xi_k>\frac{n}{1-\gamma}[M\tau(\omega)-(1-\gamma)M\tau_1(a)]\right)$$

$$\leqslant P\left(\sum_{k=1}^{n}\xi_k>n\left[\frac{c\gamma}{1-\gamma}+\int_a^{\infty}\Psi(x)\,dx\right]\right)$$

$$\leqslant\left((e^{za}-za)\exp\left\{-z\left[\frac{c\gamma}{1-\gamma}+\int_a^{\infty}\Psi(x)\,dx\right]\right\}\right)^n.$$

同理，若记$\Delta=\ldots$，便求出估计

$$P(\hat{\tau}<(1-\ldots)M\tau(\omega))\leqslant\left((e^{za}-za)\exp\left\{-\frac{z}{1-\ldots}\ldots\Delta\right.\right.$$

$$\int_a^\infty \Psi(x)dx - \gamma a\Big]\Big\}\Big\}^n. \tag{8.12}$$

记

$$u(a,\gamma) = \min_{z>0}\Big\{(e^{za} - za)\exp\Big[-z\frac{c\gamma}{1-\gamma} + \int_a^\infty \Psi(x)dx\Big]\Big\};$$

$$v(a,\gamma) = \min_{z>0}\Big\{(e^{za} - za)\exp\Big[-\frac{z}{1-\gamma}\Big[c\Delta - \int_a^\infty \Psi(x)dx - \gamma a\Big]\Big]\Big\}. \tag{8.13}$$

令Γ为二偶 (a,γ) 的值域，此时 $u(a,\gamma)<1$，$v(a,\gamma)<1$。如果 $n_0(a,\gamma)$ 是一个不小于 $\ln 0.5\delta_0/\ln u(a,\gamma)$ 的最小整数，而 $n_1(a,\gamma)$——一个不小于 $\ln 0.5\delta_1/\ln v(a,\gamma)$ 的最小整数，则可用公式 $(a,\gamma)=\arg\min\max\{n_0(a,\gamma),n_1(a,\gamma)\}$ 求出 a 和 γ。在这些值时，对 a 和 γ 有 $n=\max\{n_0(a,\gamma),n_1(a,\gamma)\}$。

现在来证明Γ的值域是非空的。实际上，对于任意 a，在 $\int_a^\infty \Psi(x)dx < c\Delta$，$0<\gamma<(c\Delta - \int_a^\infty \Psi(x)dx)/a$ 的条件下，(8.13)式右端的 $[\cdots]/(1-\gamma)$ 是非负的，令 θ 表示它。于是，在 z 小时

$$(e^{za} - za)\exp\Big\{-\frac{z}{1-\gamma}[\cdots]\Big\} = [1+o(z)][1-z\theta+o(z^2)]$$

$$= 1 - z\theta + o(z^2).$$

当 $z>0$ 且相当小时，此式小于1。因此，$v(a,\gamma)<1$。同样，当 $\gamma\in(0,1)$ 时，$u(a,\gamma)<1$；当 $a>0$ 相当小时，$a>0$。

必须指出，在所采用的 (8.9) 式条件中，任意固定 $\delta>0$ 时，参数 δ_0 和 δ_1 随 n 的增加呈等比级数减小。可以证明，如果对随机变量 $\tau(\omega)$ 的可能分布集不予限制，当破坏了 (8.9) 式的任何一个条件时，用任何估计也不能保证给定的 δ、δ_0 和 δ_1，那么无论怎样固定 n，要解式 (8.7) 和 (8.8) 都是不可能的。然而，没有 (8.9) 式，只根据 (8.7) 式却可以求出 τ。但是，只有在随机变量 $\tau(\omega)$ 的每一分布都有相当多的观察值时，才能满足 (8.8) 式。此估计是这样建立的：首先对随机变量 $\tau(\omega)$ 进行 N 次观察，并建立 [illegible]——随机变量分布的分位点 $\hat{a}$。然后，采用以上相应的估计，以 $\hat{a}$ 代替 a；当给定 $a=\hat{a}$ 时，估计 $n(a,\gamma)$ 的方法同上述方法一样。当 N、n 相当大和 δ_2 相当小时，对任意 $\gamma<c\Delta/a$，都能满足 (8.12) 式的条件。当然，要假设 $M\tau(\omega)<\infty$。

在可靠性课题中，有许可得到 $M\tau(\omega)$ 的解析估计。例如，在随机时间 ξ 内，系统处于绝对正常状态；而在时间 η 内，处于"扰动"状态；然而，此情况重复出现。这样一来，$\tau(\omega)=\xi+\eta$，所以 $M\tau(\omega)=M\xi+M\eta$。已知随机变量 ξ 的分布，且可以认为 $M\xi$ 是给定的。系统处于"扰动"状态的随机时间 η 是用下述方法确定的。一部件首先发生故障，其更新时间为 η_0。这样一来，永远有 $\eta\geq\eta_0$。可以看出，均值 $M\tau(\omega)$ 的下限估计 $\hat{\tau}$ 可取 $\hat{\tau}=M\xi+M\eta_0$，它满足由条件 $\tau\leq M\tau(\omega)$ 决定的估计。如果系统的部件是高可靠性的，则在非常一般的条件下，$M\eta_0$ 极其近似于 $M\tau$（$\eta_0=\eta$ 的情况是典型的，亦即在维修时间内，不会接着再发生故障）。

2．这函数是 [illegible] 同类事件过程 $\nu(t)$ 中 [illegible] 有关的某一流的强度。假设在每一个半开区间 $[0,\tau_0(\omega_0))$，$[\tau_0(\omega_0),\tau_0(\omega_0)+\tau(\omega_1))$，…，$[\tau_0(\omega_0)+\cdots+\tau(\omega_{n-1}),\ \tau_0(\omega_0)+\cdots+\tau(\omega_n))$，… 所发生的事件，[illegible] 半开区间里是 [illegible] 可性的。例如，[illegible] 随机过

程$\xi(t)$是在属于某一区间$(\tau_0(\omega_0)+\cdots+\tau(\omega_n),\tau_0(\omega_0)+\cdots+\tau(\omega_n))$的时刻进入某一给定状态集$R$时所发生的事件，可满足此条件。可写成$\Phi=M\beta/M\tau(\omega)$，式中$\beta$——在更新时刻之间半开区间中的事件数。表达式的分子可直接根据随机变量β的观察值估计，或按第九章所述的方法在稀疏事件情况下估计。$M\tau(\omega)$（分母）的估计已讨论过了。

3. Φ——在时间T内随机过程$\xi(t)$仅一次进入给定状态集R的概率。令$t_0=0$，$t_1=\tau_0(\omega_0)$，$t_n=\tau_0(\omega_0)+\sum_{k=1}^{n}\tau(\omega_k)$，$n\geqslant 2$。$I_n$——在半开区间$[t_n,t_{n+1})$里$\xi(t)$进入$R$集的事件状态变量，$n\geqslant 0$；$p_1=MI_n$，$n\geqslant 1$；$p_0=MI_0$。显然

$$\Phi\leqslant p_0+p\sum_{n=1}P(t_n<T)-p_1+p_1H(T), \qquad (8.14)$$

式中$H(T)$——更新过程$\{t_n\}$的更新函数，亦即在区间$(0,T)$中更新次数的均值。参数p_0、p_1的估计将在第九章中介绍。

现在来研究$H(T)$的估计。最简单的情况是$\xi(t)$——平稳过程。此时，$H(T)=T/M\tau(\omega)$，所有上述对$M\tau(\omega)$的估计，可直接用于对$H(T)$的估计。

若用(8.11)式对$M\tau(\omega)$进行估计，经推导可得到$H(T)$的渐近估计。我们认为，最有意义的是分析估计。亦即，设$\tau(\omega)=\xi+\eta$，如上所述依概率存在$r\geqslant\eta_0$；且$\tau^*=\xi+r$表示简单随机过程的随机变量。此过程的更新函数为

$$H_0^*(T)=\sum_{n=1}P(\tau_1^*+\cdots+\tau_n^*<T) .$$

式中τ_n^*，$n\geqslant 1$——与τ^*独立同分布的随机变量。显然，$H(T)\leqslant 1+H_0^*(T)$；此不等式的右端可用于估计$H(T)$的上限

第九章　计算高可靠性系统特征量的分析统计法

§9·1　小参数法的应用

小参数法是解工程问题最有力的数学工具之一。小参数的概念起源于拉普拉斯。他发现用简单的表达式可估计n相当大时的积分$\int_0^1 f^n(x)dx$，而且n越大，估计的精度就越高。虽然有估算该积分的显式，但n越大，越复杂。“因此，越是需要这种方法，其精度就越高”[118]。

将小参数法引入微分方程是渐近分析微分方程的基础。归根结底它是计算方法的基础[31,33]。在解某些参数很小（大）的数学问题时，有可能得到简单的解，在应用数学中已成为习惯，直到目前，有经验的工程师在用数学解任何问题时，不仅要给出一般数学模型，而且必须给出其参数的可能值。这就给数学家提出了重要的研究方向，即必须为应用工作者提供可接受的计算方法。

小参数法应用最多的传统形式是幂级数的渐近级数。当参数值给定时渐近级数可能发散；但，当参数值小时，渐近级数的有限项对所研究的函数有良好的近似性。后一特性往往在缺乏足够论据时可证明采用小参数法作为工程法是正确的。普安卡列（Пуанкаре）还指出，天文学家常常碰到形式上满足微分方程的的级数，而不必研究这些级数的收敛性问题[121]。早在用数学法对误差进行严格估计之前，工程法在计算实际问题中就得到广泛应用。虽然完全能够证明，任何数学模型都只是实际过程或系统的近似描述。因此，不论数学模型中的方法多么精确，都存在模型的不准确性所造成的数学错误。然而，正如普安卡列所指出的“要求计算的精度高于观察的精度是徒劳无功的；但是，不允许要求计算的精度过低”[121]。所以，小参数法的科学价值本身就是应用小参数法同时伴有误差为基础的研究（当然，在某一数学模型范围内）。

小参数法应用于计算复杂系统可靠性是由本书作者　И·Н·格瓦连科提出的。早在1964年在其所著“复杂系统可靠性理论的一些问题”一书[70]中就提到：假设$\lambda_{\nu\mu}^{(\epsilon)}dt$——在$dt$时间内随机过程由状态$\nu$向$\mu$的转移概率，并且此转移同系统某一部件的故障有关，则$\lambda_{\nu\mu}=\lambda_{\nu\mu}^{(1)}\epsilon$，式中$\epsilon$——小参数；$\lambda_{\nu\mu}^{(1)}$——常数。以后，格瓦连科还谈到，可靠性特征量按小参数幂的展开系数可作为某些随机过程泛函均值加以解释[74]。这是按蒙特卡罗法提出的估计方法。格瓦连科在“复杂系统可靠性分析的研究”一书[75]中提出了进一步的结果。本章将介绍决定了小参数的转移概率的马尔科夫链特性的综合分析统计法；获得估计此方法的误差；最后，得出在更新时刻之间系统可靠性特征量的计算方法。于是，结合第八章的结果可以研究系统可靠性的许多平稳和非平稳特征量。如果将可靠性特征量由以随机变量均值的形式表示，改为按相应分布的多维积分形式表示，则可立即获得高可靠性系统的极限定理和渐近估计。在许多情况下，这样可获得简单的渐近关系式。特别有意义的是，当过程特征量的均值给定时（例如，部件更新时间分布的均值），可获得可靠性特征量精确的上下限估计的渐近表达式。然

而，这些问题超出了本章的范围。

现在援引在可靠性理论中应用小参数法的一般要求。在第八章中曾指出，系统的功能指标可以用状态变量$\nu(t)$和补充变量的分段线性马尔科夫过程加以描述。如果要研究离散状态分量的依次改变，则可得到随机序列的每一项是有限集或可数集的随机序列。现在来研究过程$\nu(t)$由状态i向另一状态j的可能转移。其中，某些转移与系统部件发生故障的稀疏事件有关。此类事件的概率值自然可认为与决定于i和j的幂的小参数ε成比例。其中，i和j——$\nu(t)$旧的和新的状态。在大多数情况下，可限制以“高概率”转移（此时，当$\varepsilon\to0$时，转移概率趋于正数）；限制概率与ε成比例的“小概率”转移；以及当任意小的$\varepsilon>0$时限制不可能的转移。

§9·2 对具有可数状态集的马尔科夫链中相邻两次更新时刻内稀疏事件概率的估计

现在来研究可靠性分析中最简单也是最重要的情况。对于在时间T内随机过程$\xi(t)$仅有一次进入状态集R的概率Φ，曾获得其估计为（8.14）式。这个估计为$\hat{\Phi}\leqslant p_0+p_1H(T)$，式中$H(T)$——更新函数；$p_0$、$p_1$——分别为$\xi(t)$在更新时刻之间的半开区间始点和终点进入状态集$R$的概率。在上一章中，已谈到对$H(t)$的估计的要求。这样一来，剩下来的问题就是估计$p_0$和$p_1$。因为二者的估计量实际是一样的，引用过程进入$R$集的概率，如在必要时$p_0$或$p_1$都可作为此概率看待。

现在，利用某一可数状态集内马尔科夫链来研究时间是离散的随机过程$\xi(t)$的性态。于是，我们便可以研究可数状态集X的马尔科夫链$\{\nu_n, n\geqslant0\}$，$n=0$是初始时刻。首先，假设以后的更新时刻依概率存在，并记作t。如果各相邻更新时刻之间的时间间隔由持续时间为ξ和η的时间间隔组成（ξ——系统处于完全正常的时间），而且在ξ时间内进入R集是不可能的，则对ξ不再进行研究。可以认为，在时间间隔η的开始时刻系统的状态为ν_0。以下所有计算不变。其次，设状态$R\subset X$，ν_n首次进入R的时刻（包括$n=0$）记作ν。我们的任务是估计相邻两更新时刻间马尔科夫链$\{\nu_n\}$进入状态集R的概率（确切地说，在$0\leqslant n<t$时），$p=P(\nu<t)$。假设状态$\{\nu_n\}$的初始概率和转移概率可依小参数ε展开：

$$P(\nu_0=j)=p_j^{(0)}=\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon^m p_j^{(0,m)};\tag{9.1}$$

$$P(\nu_{n+1}=j, t>n+1 \mid \nu_n=i, t>n)=\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon^m p_{ij}^{(m)};\tag{9.2}$$

而且
$$\sum_j p_j^{(0,m)}\leqslant c^m;\quad \sum_j p_{ij}^{(m)}\leqslant c^m, i\in X,\tag{9.3}$$

式中$c>0$——与ε无关的常数，并可看作是$\varepsilon c<1$的情形。

按下述方法引入随机变量，$\nu_n^{(m)}, \theta_n^{(m)}, n\geqslant0, \omega_n^{[m]}, n\geqslant1$。设$\nu_0^{(m)}$——分布为

$$P(\nu_0^{(m)}=j)=p_j^{(0,m)}\Big/\sum_k p_k^{(0,m)},\quad j\in X$$

的随机变量，在上式中分母为正的，$m\geqslant0$。其次，引入定义

$$\theta_0^{(m)}=\begin{cases}0, & \sum_k p_k^{(0,m)}=0\\ [illegible]\left(\sum_k p_k^{(0,m)}\right) & \text{反之。}\end{cases}\tag{9.4}$$

设已知$\nu_n^{[m]}, \theta_n^{[m]}$ …… 是根据在 $\nu_n^{[l]}$ 时 $\theta_n^{[l]}$ …… $\sum p_{ij}^{[m-l]}| > 0$ 的所有非负l来计算的。设 $U_{n+1}^{[m]}$ …… 集的元素数。如果 $|U_{n+1}^{[m]}| = 0$，则令$\theta_n^{[m]}$ 0。如果 $|U_{n+1}^{[m]}| > 0$，则随机变量……在$U_{n+1}^{[m]}$中取任意值的概率为1，$U_{n+1}^{[m]}$。如果随机变量……$= l$，…… $= i$，则随机变量$\nu_{n+1}^{[m]}$取任意值j的概率为 p_{ij} …… $\sum p_{ij}^{[m-l]}$；如果$\nu_{n+1}^{[m]} = j$，则可得到

$$\theta_{n+1}^{[m]} = (\operatorname{sign} p_{ij}^{[m-l]}) |U_{n+1}^{[m]}| \sum_j |p_{ij}^{[m-l]}| \theta_n^{[l]}。 \quad (9.5)$$

对于$\theta_n^{[m]}$的m来说，以前不是作为……来计算的。

设 $p_{ij}^{[m]} = P(\nu_m = j, \ldots)$。很容易看出，当取$c\varepsilon < 1$的条件时，可将$p_{ij}^{[m]}$按$\varepsilon$的幂展开成下列收敛级数

$$p_{ij} = \sum_m \varepsilon^m p_{ij}^{[m]}。 \quad (9.6)$$

定理9.1 设$f(j)(j \in X)$——任意有界函数。于是，对于任意$n \geq 0$时，$\theta_n^{[m]} f(\nu_n^{[m]})$ 是参数 $\sum_X f(j) p_{ij}^{[m]}$ 的无偏估计

$$M\theta_n^{[m]} f(\nu_n^{[m]}) = \sum_{j \in X} f(j) p_{ij}^{[m]}。 \quad (9.7)$$

说明： 当$\theta_n^{[m]} = 0$时，随机变量$\nu_n^{[m]}$可以不进行计算，但$\theta_n^{[m]} f(\nu_n^{[m]})$要作为0来计算。

证明： 可以看出，定理的推论与下式是等价的

$$M\theta_n^{[m]} I(\nu_n^{[m]} = j) = p_{ij}^{[m]}。 \quad (9.8)$$

式中 $I(A)$——随机事件A的状态变量（当事件A出现，则$I(A) = 1$；反之，$I(A) = 0$）。上述的等价性是根据对"1展开"和数学期望的线性运算得出的。当……时，检查(9.8)式。如果$\sum_l p_{ij}$ …… 0，则$\theta^{[m]}$ …… 0；反之，

$$M\theta \ldots I(\nu \ldots = j) = \operatorname{sign} p \ldots \sum \ldots p \ldots$$

$$\sum p \ldots = p \ldots$$

（采用公式（9.4））。

现在设某……0 时，满足（9.8）式，检查是否用$n+1$代替n。将（9.6）、(9.7）式代入$p_{ij}^{[m]}$ …… $\sum \ldots$，并由绝对收敛幂级数连乘，便得

$$p \ldots - \sum \sum_{X} p_{ij}^{[l]} \ldots = 0。 \quad (9.9)$$

将（9.8）式代入（9.9）式右端，如果n为给定值时，公式便得到满足，存在

$$p_{ij}^{[m]} = M\sum_{l=1}^{m} \sum_{X} \theta_n^{[l]} I(\nu_n^{[l]} = i) p_{ij}^{[m-l]}。 \quad (9.10)$$

现在再研究固定θ_n …… ，$0 \leq l \leq m$时，（9.10）式右端和的条件数学期望

$$M \sum_{l=0}^{m} \sum_{i \in X} \theta_n \ldots I(\nu_n \ldots = i) \ldots p_{ij}^{[m]} \ldots \theta_n^{[l]} \ldots (0 \leq l \leq m)$$

$$= \sum_{l=0}^{m} \ldots p \ldots \sum \ldots p \ldots \sum_{j \in U_{n+1}^{[m]}} p \ldots, \quad (9.11)$$

$$\sum p_{ij} \ldots$$

若引用$\sum_{i \in U} f(i) = |U| Mf(\omega)$（式中$\omega$——在$U$上均匀分布的随机变量），则（9.11）最后的表达式可变为

$$\| U_{n}^{[m]} \| M\theta_{n} p_{\omega}^{[m]} = \| U_{n}^{[m]} \| M\theta_{n}(\mathrm{sign}\, p_{\omega}^{[m]}) \sum_{k} p_{\omega}^{[m]} \frac{p}{\sum_{k} p_{\omega}^{[m]}}$$

$$= M\{\| U_{n+1}^{[m]} \| \theta_{n}^{[m]} (\mathrm{sign}\, p_{\omega\, v_{n+1}}^{[m]}) \sum_{k} p^{[m]} I(v_{n+1}^{[m]} = j) \cdots\}$$

$$= M\{\theta_{n}^{[m]} I(v_{n}^{[m]} = j) \cdots\},$$

式中记$\omega = \omega_{n+1}^{[m]}$。在论证时，假设$\| U_{n}^{[m]} \| > 0$，但在$U_{n}^{[m]} = 0$时，最后的结果也是正确的。因为，在这种条件下，依定义$\theta_{n}^{[m]} = 0$。按条件数学期望，求得

$$p_{j}^{[m]} = M\theta_{n}^{[m]} I(v_{n}^{[m]} = j)。$$

于是，定理证毕。

这样一来，便得到按小参数ε幂渐近展开系数$f^{[m]}$的模型。

下面，再回到最初的问题上来：估计在更新时刻之间的时间间隔里马尔可夫链进入状态集R的概率p。可以写成

$$p = \sum_{n=0}^{\infty} f_{n}。$$

式中$f_{n} = P(v_{n} \in R, v_{k} \notin R, k < n, t > n)$——第$n$步首次进入$R$集的概率。$f_{n} = \sum_{m=0} \varepsilon^{m} f_{n}^{[m]}$，而且在$\varepsilon < 1$时右端的级数收敛。为了估计$f_{n}^{[m]}$，也可以利用变量$v_{n}^{[m]}$、$\theta_{n}^{[m]}$和建立新的状态变量$J_{n}^{[m]}$。这些变量可以“制止”（«...асить»）短期进入R集。现在，用递归法求这些量：如果$v_{n}^{[m]} \in R$，$\omega_{n+1}^{[m]} = l$时，则得到$J_{n}^{[m]} = 0$。此外，如果$J_{n}^{[m]} = 1$，$\omega_{n}^{[m]} \neq l$时，同样可得到$J_{n+1}^{[m]} = 0$。在所有其它条件下，都可得到$J_{n}^{[m]} = 1$。

定理9.2 变量$f_{n}^{[m]}$的无偏估计为

$$\hat{f}_{n}^{[m]} = J_{n}^{[m]} \theta_{n}^{[m]} I(v_{n}^{[m]} \in R)。\tag{9.1?}$$

证明方法与定理9.1的相同。

§9·3 误差的估计

为了利用级数的有限线性项之和代替级数之和进行估计（无论是对n求和，还是对m求和，最好预先确定保证的精度。估计存在误差的主要原因，是利用不同的方法使“快速修复”（«Быстром Восстановлении»）的假设具体化。现介绍其中的一种方法。

在更新时刻，系统恢复为完全正常状态。由状态i向j的转移与转移步数不超过r有关，这里的转移概率为$p_{ij} = O(\varepsilon^{r})$。因此，如果从该时刻起以后不再发生故障，则不需超过r步转移就能恢复到初始状态。此论点的阐述如下。

令$p_{ij}^{[0]} > 0$。于是，状态由i向j的转移叫做高概率的转移，并得到$r(i,j) = 0$。如果在所有的$m < r$和$p_{ij}^{[r]} > 0$的条件下$p_{ij}^{[m]} = 0$，便得到$r(i,j) = r$。同理，当$p_{j}^{[0]} > 0$时，初始状态j叫做高概率的，并得到$r_{0}(j) = 0$；如果$p_{j}^{[m]} = 0$，$m < r$，$p_{j}^{[r]} > 0$，则得到$r_{0}(j) = r$。如果$r(i,j) \geq 1$，或者$r_{0}(j) \geq 1$，则将$i \to j$的转移（相当于初始状态j）叫做小概率转移。如果$p_{ij} = 0$（相当于$p_{j} = 0$），则得到$r(i,j) = \infty$（$r_{0}(j) = \infty$）。

最小的r叫做该状态j的秩，记作$r(j)$。对于r来说，可求出$i_{n} = j$，$r_{0}(i_{0}) + r(i_{0}, i_{1}) + \cdots + r(i_{n-1}, i_{n}) = r$的状态链$(i_{0}, i_{1}, \cdots, i_{n})$。如果把在$r_{0}(j) = r$（相当于$r(i,j) = r$，其中在

$r\geqslant 1$ 的条件下，ν_0进入状态j或由$\nu_n=i$向$\nu_{n+1}=j$转移，看作是r个部件*同时发生故障，则该状态既秩是这一状态可以达到的最小故障数。现在来描述“快速修复”的条件。

对于$r(i)=0$存在唯一的状态$i=0$，如果$\nu_n=0$，则n——更新时刻。如果对于某些i和j，$r(i,j)=0$，则$r(j)<r(i)$。

必须指出，用该方案计算可靠性时，“快速修复”并不表明更新时刻的长短，$\{\nu_n\}$仅仅决定于分段线性马尔科夫过程状态的跳跃时刻，而不考虑这些时刻之间的间隔长短。

还要指出，将ν看成是系统距离完全正常状态的时刻，ν_t是完全恢复正常状态的时刻。

若固定某些$n\geqslant 1$和$s(1\leqslant s\leqslant n)$，便可得到

$$1-\sum_{t\leqslant n} f_t\ \ f_{t_0 t_1\cdots}$$

$$=\sum_{m=0}^{s-1}\varepsilon^m\sum_{r_0+r_1+\cdots+r_n=m} p\ \ p^{[r_1]}\cdots p^{[r_n]}+R_s, \tag{9.13}$$

式中R_s——通项之和（在$m\geqslant s$时展开）与（9.13）式右端之和一样。若记$\varepsilon c=\delta$，由(9.13)式可得

$$R_s\leqslant\sum_{r_0+\cdots+r_n=s}\delta^{r_0+\cdots+r_n}, \tag{9.14}$$

式中$r_0,\cdots,r_n$——非负整数。显然

$$\sum_{r_0+\cdots+r_n=s} 1=C_{n+s}^{s}, \tag{9.15}$$

（也可用生成函数法证明）。其次

$$C_{n+s+k}^{s+k}\leqslant\left(\frac{n+s+1}{s+1}\right)^k C_{n+s}^{s},\quad k\geqslant 1. \tag{9.16}$$

只有当$\delta<(s+1)/(n+s+1)$时，由（9.4）—(9.16）式可得

$$R_s\leqslant C_{n+s}^{s}\left(1-\delta\frac{n+s+1}{s+1}\right)^{-1}\delta^s. \tag{9.17}$$

由“快速修复”条件可得出如下结论。如果$r_0+r_1+\cdots+r_n=m\leqslant n+1$，则在$t_{k-1}\to t_k(1\leqslant k\leqslant n)$的转移是不少于$n-m+r_0$步的高概率转移。这就是说，当$t>n$时，可满足不等式$r(t_n)\leqslant m-(n-m+r_0)=2m-n-r_0$。然而，在此条件下，$r(t_n)\geqslant 1$，这样一来，当$t>n$时，$2m\geqslant n+1$。显然，如果$r_0+\cdots+r_n=m>r$，则$2m\geqslant n+r_0+1\geqslant n+1$。因为在不同的$(n,m)$时，$f_n^{[m]}$可归结为按$(t_0r_0;t_1r_1;\cdots;t_nr_n)$组成的不相交集简化为$p^{[r_0]}p^{[r_1]}_{t_0}\cdots p^{[r_n]}_{t_{n-1}}$之和，所以

$$\sum_{t\leqslant n}f_t+\sum_{k>n}\sum_{m\geqslant s}f_k^{[m]}\varepsilon^m\leqslant R_s. \tag{9.18}$$

根据（9.13）和（9.18）式的估计，得出以下估计

$$\sum_{m=0}^{s-1}\varepsilon^m\sum_{k=0}^{n}f_k^{[m]}-p<C_{n+s}^{s}\left(1-\delta\frac{n+s+1}{s+1}\right)^{-1}\delta^s, \tag{9.19}$$

式中$\varepsilon c=\delta<(s+1)/(n+s+1)$；$s$——不小于$(n+1)/2$的最小整数。因为，$C_{n+s}^{s}\leqslant(3^{3/2}/2)^n$，$n\geqslant 1$，所以，如果$\delta<4/27$和选择足够大的$n$时，则用表达式$\sum_{m=0}^{s-1}\varepsilon^m\sum_{k=0}^{n}f_k^{[m]}$，可使近似

* 这种解释对解决可靠性课题适用，在其它情况下，并不是一定要遵循的——原注。

算法对 p 的渐近误差任意小。如果再将 δ 看作是小参数，则不等式（9.19）可给出对 p 的估计达到任意精度。

应该指出，按 m 求和的近似表达式，只有当 m 充分大时才适用。例如，如果 $r(R) = \min_{i \in R} r(i)$，则

$$f_k^{(n)} = 0, \quad n < r(R). \tag{9.20}$$

若取 $s = r(R) + 1$，$n = 2s - 1$，则由（9.19）、（9.20）式可得

$$\varepsilon^{-r(R)} \sum_{k=1}^{2r(R)+1} f_k^{[r(R)]} - p \leqslant C_{2r(R)+2}^{r(R)+1} \left(1 - 3\delta \frac{r(R)+1}{r(R)+2}\right)^{-1} \delta^{r(R)} [illegible].$$

此估计有很大的实用价值。估计表明，在 ε 很小和 δ 为有限值时，可用表达式 $\varepsilon^{-r(R)} \sum_{k=1}^{R+1} \hat{f}_k^{[r(R)]}$ 来估计 p，其相对误差约为 ε。

现在来说明由定理9.2给出的无偏估计精度。为此应注意，由于有（9.12）式，所以有 $f_k^{(n)} \leqslant \theta_k^{(n)}$，若记 $\theta_n^{(m)} = c^n \vartheta_n^{[m]}$，则根据（9.5）式得

$$\theta_{n+1}^{[m]} \leqslant L_{n+1}^{m} \max_{i \in n} \theta_n^{[illegible]}. \tag{9.21}$$

因为，由于（9.4）式 $\theta^{(m)} \leqslant 1$，所以由（9.21）式有 $\theta_n^{[m]} \leqslant \prod_{k=1}^{n} (\max L_k^{[illegible]})$，由此得到

$$\vartheta_n^{[m]} \leqslant c^n \prod_{k=1}^{n} (\max L_k^{[illegible]}).$$

因为 $L_k^{[illegible]} \leqslant i+1$，便有

$$\vartheta_n^{[m]} \leqslant c^m (n+1)^n. \tag{9.22}$$

由定理9.2给出的表达式 $\sum_{k=1}^{R} [illegible]$ 是无偏估计，由于存在（9.22）式，其方差估计满足

$$\sum_{k=1}^{2r(R)} \hat{f}_k^{[r(R)]} \leqslant c^{[illegible]} [r(R)+1]^{2[illegible]} \frac{r(R)+2}{r(P)+1}. \tag{9.23}$$

这样一来，在计算随机变量的估计 $\sum_{k=1}^{2r(R)+1} f_k^{[illegible]}$ 时，用（9.23）式右端的平方根作为随机变量的方差上限。由此可见，如果

$$\hat{p} = \varepsilon^{-r(R)} \sum_{k=1}^{2r(R)+1} \hat{f}_k^{[r(R)]},$$

那么，$M(\hat{p} - p)^2 = O(\varepsilon^{[illegible]})$，$\varepsilon \to 0$。

§9·4 其它泛函的估计

在第八章的最后一节列举了进入状态集 R 的状态变量外，还列举了典型实例：在更新时刻之间过程轨迹上求出的随机变量，以及通过更新时刻数学期望值可以精确地或近似地表示系统可靠性或重要特征值的随机变量。例如，不考虑在不同情况下这些变量的不同序列。则此方法只要求对上述方法进行不大的改进，现在介绍此改进模型。

令 φ 是完全由轨迹线段 ν_n，$0 \leqslant n < t$（式中 $t-1$ 是某一事件（更新）时刻）决定的马尔科夫链 $\{\nu_n, n \geqslant 0\}$ 轨迹的某一泛函，初始概率和转移概率由式（9.1）、（9.2）给出。

与具体任务有关的上述轨迹线段，可以看作是相邻两次更新时刻间的时间，或者是系统从脱离绝对正常状态到恢复此状态前的时间；还可以有其它表示法。我们记 $f = M\varphi$。首先，为

不失一般性，可以认为φ值完全决定于状态ν_{t}。在必要的条件下，只要扩展马尔科夫链状态的范围就可以了。例如，认为$(\nu_0, \nu_1, \cdots, \nu_n)$是在第$n$步的状态$\nu_n$。在这种条件下，有

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n,$$

式中$f_n = M\varphi I(t = n+1)$。

假设$P(t = n+1 \mid \nu_n = x, t > n) = p_{x,n}$，$p_x$看作是与$\varepsilon$无关的变量。按$\varepsilon$幂的形式展开$f_n$，便得

$$f_n = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m f_n^{[m]}. \tag{9.24}$$

显然，当φ为有限值时，此级数收敛，则随机变量$f_n^{[m]}$的无偏估计为

$$\varphi_n^{[m]} = \theta_n^{[m]} \varphi(\nu_n^{[m]}) I(t_n^{[m]} = n+1).$$

式中$\theta_n^{[m]}$、$\nu_n^{[m]}$按上述方法求出。当给定$\theta_n^{[m]}$和$\nu_n^{[m]} = x$时，随机变量$I(t_n^{[m]} = n+1)$以概率p_x^*等于1，和以概率$1-p_x^*$等于0。

最有意义的是存在着具有下列特性的R集：$r(R) = r \geqslant 1$。如果$\nu_t \notin R$，则$\varphi = 0$。在此条件下，便称r为泛函φ的秩。对（9.24）式从r次幂开始展开，可以看出，当$|\varphi| \leqslant 1$时，用（9.23）式来估计f是正确的。

§9·5 在任意状态空间上的推广

以上各节所述的算法，可直接推广到马尔科夫链$\{\nu_n\}$的任意状态空间X。

令$\{\nu_n\}$——在$0 \leqslant n < t$时所得到的任意状态空间X的马尔科夫链，其中$t \geqslant 1$——随机时刻，且

$$P(\nu_0 \in A) = P_0(A), P(\nu_{n+1} \in A;\ t > n+1 \mid \nu_n = x,\ t > n) = P(x, A),$$

式中所有A是状态空间X的子集，A属于主要σ代数。假设

$$P_0(A) = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m P_0^{[m]}(A), P(x, A) = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m P^{[m]}(x, A);$$

且
$$\int_X |P_0^{[m]}(dx)| \leqslant c^m, \int_X |P^{[m]}(x_0, dx)| \leqslant c^m, x_0 \in X,$$

式中$c > 0$——与ε无关的常数。

现在来说明定理9.1的推广。

按下述方法引入随机变量$\nu_n^{[m]}, \theta_n^{[m]}, n \geqslant 0; \omega_n^{[m]}, n \geqslant 1$。现在将$\int_X |P_0^{[m]}(dx)| > 0$，$\nu_0^{[m]}$中的$m$作为随机变量来计算，它属于$A$，而$A$的概率为$\int_A |P_0^{[m]}(dx)| / \int_X |P_0^{[m]}(dx)|$。如果$\nu_0^{[m]} = x_0$，则

$$\theta_0^{[m]} = \operatorname{sign} \frac{P_0^{[m]}(dx_0)}{|P_0^{[m]}(dx_0)|} \int_X |P_0^{[m]}(dx)|.$$

当$\int_X |P_0^{[m]}(dx)| = 0$时，则$\theta_0^{[m]} = 0$。

设$\nu_k^{[m]}$、$\theta_k^{[m]}$已求出。如果$\theta_k^{[m]} \neq 0$和$\int_X |P^{[m]}(x_k, dx)| > 0$，则将集$U_k^{[m]}$当作非负整数集来研究。其中$x_k = \nu_k^{[m]}$

令 $|U_{n+1}^{[m]}|$——集合$U_{n+1}^{[m]}$的元素数。如果 $|U_{n+1}^{[m]}|=0$，则$\theta_{n+1}^{[m]}=0$。如果 $|U_{n+1}^{[m]}|>0$，则把$\omega_{n+1}^{[m]}$作为随机变量来研究，它在集合$U_{n+1}^{[m]}$中依概率$1/|U_{n+1}^{[m]}|$取任意值。如果$\nu_n^{[l]}=x_0$，$\omega_{n+1}^{[m]}=l$，则把$\nu_{n+1}^{[m]}$作为随机变量来研究，它依概率$\int_A |P^{[m-l]}(x_0,\mathrm{d}x)|\Big/\int_X |P^{[m-l]}(x_0,\mathrm{d}x)|$进入集合$A$。如果$\nu_{n+1}^{[m]}=x$，则

$$\theta_{n+1}^{[m]}=\operatorname{sign}\frac{P^{[m-l]}(x_0,\mathrm{d}x)}{|P^{[m-l]}(x_0,\mathrm{d}x)|}\,|U_{n+1}^{[m]}|\int_X |P^{[m-l]}(x_0,\mathrm{d}x)|\,\theta_n^{[l]}.$$

假设对某一常数$c>0$时

$$\int_X |P_0^{[m]}(\mathrm{d}x)|\leqslant c^m,\ \int_X |P^{[m]}(x_0,\mathrm{d}x)|\leqslant c^m,\ x_0\in X. \qquad (9.25)$$

当$c\varepsilon<1$时，在所取条件中，函数$P^{(n)}(A)$可按ε的幂展开为

$$P^{(n)}(A)=\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon^m P^{(n)[m]}(A).$$

对于概率测度任意可积分的有限函数$f(x)$，在所引用的随机变量术语中，可以满足等式

$$M\theta_n^{[m]}f(\nu_n^{[m]})=\int_X f(x)P^{(n)[m]}(\mathrm{d}x).$$

同理，上述各节的所有结果，都可在任意状态空间中应用。

§9·6 在高可靠性系统特征量计算中的应用

现在来研究复杂系统功能的下列模型。在任意时刻t，系统可处于由可能值为可数集或有限集组成的离散状态$\nu(t)$。与状态$\nu(t)=\nu$相对应的是在该状态时进行$|\nu|\geqslant 0$次更新转移（可能以零速度进行）。

令$z_j(t)$——时刻前第j次过程转移所需的时间。于是，在$\mathrm{d}t$时间内，第j次转移过程以概率$h_{\nu j}(z_j(t))\mathrm{d}t$结束，式中$h_{\nu j}(x)\geqslant 0$——给定的函数。随着第$j$次转移的结束，$\nu(t)$依概率$p_{\nu\mu}^{(j)}$由$\nu$向$\mu$转移，$\sum_{|\mu|=|\nu|-1} p_{\nu\mu}^{(j)}=1$。当$i<j$时，新的$z_i(t)$等于原先的值；当$i\geqslant j$时，新的$z_i(t)$值等于原先的$z_{i+1}(t)$。如果在$\mathrm{d}t$时间内，第$j$次转移过程未结束，则$z_j(t+\mathrm{d}t)=z_j(t)+a_{\nu j}\mathrm{d}t$，其中$a_{\nu j}$——给定常数。

记$\zeta(t)=(\nu(t);\ z_1(t),\cdots,z_{|\nu(t)|}(t))$。设$\zeta(t)=(\nu,z)$，式中$z$——$z_j$值的集合，$j\geqslant 1$。这样，在$\mathrm{d}t$时间内状态$\nu(t)$依概率$\lambda_{\nu\mu}(z)$向$\mu$转移，即系统的某一部件发生故障。此时，永远是$|\mu|>|\nu|$。在发生故障的时刻，即状态$\nu(t)$由$\nu$向$\mu$转移的时刻向量$\zeta(t)$的新值为$(\mu;z_1,z_2,\cdots,0,\cdots0)$*（0表示转移过程刚刚开始。即，还未工作）。

令$|\nu|=0$的唯一值是$\nu=0$。设$\nu(-0)=0$，$\nu(+0)\neq 0$。从时刻$t=0$到$\nu(t)$首次恢复0状态的时刻前的时间，叫做周期。令R——ν的某一可能状态集。

p——在一周期内，$\nu(t)$仅有一次进入R集的概率。

现在来说明，当用小参数$\lambda_{\nu\mu}(\cdots)$表示高可靠性系统的条件下怎样完成渐近分析和计算p的任务。必须指出，下述渐近算法的论证同一般的论证不同。然而，却相当简单，还要指出，将用已工作的时间z代替剩余工作时间$\xi_j(t)$（即剩余寿命，见第八章）。对高可靠性系

---

* 其实，为使计算不致于太复杂，也可以看作是从修复的最后时刻起，过程$\zeta(t)$决定着$\lambda_{\nu\mu}(\cdots)$的整个轨迹。

统的计算具有下述优点：首先，根据已工作的时间给出的故障率要比根据剩余寿命给出的故障率更恰当；其次，当部件的平均更新时间与单位时间可比拟时，周期依概率具有有限值。因此，虽然剩余寿命是很大的，但它却是有限值。

这样，若取以下条件，则上述所有引入的过程$\zeta(t)$的特征量都决定于小参数$\varepsilon>0$。

1．$\sum_i h_{\nu i}(z) \geqslant a\Psi(\varepsilon)$，式中$a>0$——常数，$\Psi(\varepsilon)>0$——对所有的$\nu\neq 0$和任意$z$的某一函数，$\varepsilon>0$。

2．对$\sup_z \lambda_{\nu\mu}(z)>0$来说，与任意一对状态$(\nu,\mu)$，$|\nu|<|\mu|$，对应的自然数$r(\nu,\mu)\geqslant|\mu|-|\nu|$，这样

$$\lambda_{\nu\mu}(z)\leqslant A_{\nu\mu}\varepsilon^{r(\nu,\mu)}\Psi(\varepsilon), \tag{9.26}$$

式中

$$\sum_{\mu:\ r(\nu,\mu)=k} A_{\nu\mu}\leqslant K^k<\infty,\ k=1,2,\cdots. \tag{9.27}$$

根据(9.26)、(9.27)式，令$\lambda_{\nu\mu}(z)=\lambda^0_{\nu\mu}(z)\varepsilon^{r(\nu,\mu)}\Psi(\varepsilon)$，这时有$\sum_{\mu:\ |\mu|=|\nu|+k}\lambda^{(k)}_{\nu\mu}(z)\leqslant K$。如果$|\nu|<|\mu|$和对所有的$z\lambda^{(r)}_{\nu\mu}=0$，则$r(\nu,\mu)=\infty$。

再用$r_0(\nu)\geqslant|\nu|$表示根据下述假设计算的非负整数：

$$\lambda_{0\nu}/\lambda_0=g_\nu\varepsilon^{r_0(\nu)}, \tag{9.28}$$

式中$\sum_{\nu:\ r_0(\nu)=k} g_\nu\leqslant K_0^k, k=1,2,\cdots$。我们将认为，$r_0(\nu)$可取$\infty$值。如果对于某一对状态$(\nu,\mu)$，其中在某一$j$，$p^j_{\nu\mu}>0$时，$|\mu|=|\nu|-1$，则$r(\nu,\mu)=0$。如果对于所有的$j$都存在$p^j_{\nu\mu}=0$，则$r(\nu,\mu)=\infty$。现在令$\nu$——任意状态$\nu(t)$，但$|\nu|>0$。

现在来研究所有可能链的集$\{\nu_0,\cdots,\nu_n\}$，式中$\nu_n=\nu$，$|\nu_i|\geqslant|\nu_{i-1}|-1$，$|\nu_i|\neq|\nu_{i-1}|$，$1\leqslant i\leqslant n$。

令$r(\nu)$表示上述形式所有可能链之和$r_0(\nu_0)+r(\nu_0,\nu_1)+\cdots+r(\nu_{n-1},\nu_n)$的最小值。对于$\nu\in R$，称可能的最小值$r(\nu)$为可能状态$\nu(t)$之集合$R$的秩，记作$r(R)$。

下面来研究马尔科夫链$\{\zeta_0,\zeta_1,\cdots\}$在周期上随机过程$\zeta(t)$的轨迹。式中$\zeta_0=\zeta(+0)$，$\zeta_1,\zeta_2,\cdots$——在链的跳跃时刻随机过程$\zeta(t)$取值的序列。显然

$$P(\zeta_0=(j,0,\cdots,0))=p_j^0=\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon^m p_j^{0(m)};$$

$$p_j^{0(m)}=\begin{cases} g_j, & m=r_0(j),\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

由(9.28)式得

$$\sum_j p_j^{0(m)}\leqslant K_0^m.$$

令$P(x,A)$为在$\zeta_n=x$的条件下，事件$\{\zeta_{n+1}\in A\}$的概率。如果$x=(\nu,z)$，其中$|\nu|>0$则对于任意$(\mu,z')\in A$，仍然得到$|\mu|>0$。在这种条件下

$$P(\zeta_{n+1}\in A, t>n+1\mid\zeta_n=x, t>n)=P(x,A) \tag{9.29}$$

下面具体地研究此概率。令$x=(\nu,z)=(\nu,z_1,\cdots,z_{|\nu|})$。并记$\lambda_\nu(z)=\sum_{|\mu|>|\nu|}\lambda_{\nu\mu}(z)$。令$u_0(\nu,z)$——某部件在状态$(\nu,z)$发生故障时刻的一瞬间的概率，在该时刻修复的部件还未修好部件就发生故障了。$u_i(\nu,z)$，$1\leqslant i\leqslant|\nu|$——在同样条件下，在其它或某一部件发生故障前，第$i$次维修结束的概率。于是，很容易看出

$$u_0(\nu,z)=\int_0^\infty \exp\left\{-\int_0^t\left[\sum_{j=1}^{\nu} h_{\nu j}(z_1+\alpha_{\nu 1}y,\cdots,z_{|\nu|}+\alpha_{\nu|\nu|}y)\right.\right.$$

$$\left.\left.+\lambda_\nu(z_1+\alpha_{\nu1}y,\cdots,z_{|\nu|}+\alpha_{\nu|\nu|}y)\right]dy\right\}\lambda_\nu(z_1+\alpha_{\nu1}t,\cdots,z_{|\nu|}+\alpha_{\nu|\nu|}t)dt;$$

$$u_j(\nu,z)=\int_0^\infty \exp\left\{-\int_0^t\left[\sum_{j=1}^{\nu} h_{\nu j}(z_1+\alpha_{\nu 1}y,\cdots,z_{|\nu|}+\alpha_{\nu|\nu|}y)\right.\right.$$

$$\left.\left.+\lambda_\nu(z_1+\alpha_{\nu1}y,\cdots,z_{|\nu|}+\alpha_{\nu|\nu|}y)\right]dy\right\}h_{\nu j}(z_1+\alpha_{\nu1}t,\cdots,z_{|\nu|}$$

$$+\alpha_{\nu|\nu|}t)dt,\quad 1\leqslant j\leqslant|\nu|.$$

必须指出，若$\zeta_n=(\nu_n,z_n)$，$n\geqslant0$，则$P(\nu,z,\mu)=P(\nu_{n+1}=\mu|\zeta_n=(\nu,z))$。当$|\mu|>|\nu|$时，满足以下估计

$$P(\nu,z,\mu)=\int_0^\infty \exp\left\{-\int_0^t\left[\sum_{j=1}^{\nu} h_{\nu j}(z_1+\alpha_{\nu 1}y,\cdots,z_{|\nu|}+\alpha_{\nu|\nu|}y)\right.\right.$$

$$\left.\left.+\lambda_\nu(z_1+\alpha_{\nu1}y,\cdots,z_{|\nu|}+\alpha_{\nu|\nu|}y)\right]dy\right\}\lambda_{\nu\mu}(z_1+\alpha_{\nu1}t,\cdots,z_{|\nu|}+\alpha_{\nu|\nu|}t)\,dt$$

$$\leqslant\int_0^\infty\exp\{-a\Psi(\varepsilon)t\}\Lambda_{\nu\mu}\varepsilon^{r(\nu,\mu)}\Psi(\varepsilon)dt=\frac{1}{a}\Lambda_{\nu\mu}\varepsilon^{r(\nu,\mu)}.$$

当$r(\nu,\mu)=k$ $(k\geqslant1)$时，对μ求和便得

$$\sum_{\mu:r(\nu,\mu)=k}P(\nu,z,\mu)\leqslant\frac{1}{a}K^k\varepsilon^{r(\nu,\mu)},k\geqslant1. \tag{9.30}$$

因为$r(\nu,\mu)\geqslant|\mu|-|\nu|$，由（9.30）式得

$$\sum_{\mu:|\mu|=|\nu|+k}P(\nu,z,\mu)\leqslant\frac{(K\varepsilon)^k}{a(1-K\varepsilon)}.$$

现在，在$x=(\nu,z)=(\nu,z_1,\cdots,z_{|\nu|})$时，便得到

$$P(x,A)=\sum_{m=0}^\infty\varepsilon^m P^{(m)}(x,A).$$

这里，在$m\geqslant1$时，

$$P^{(m)}(x,A)=P_1^{(m)}(x)P_2^{(m)}(x,A), \tag{9.31}$$

式中

$$P_1^{(m)}(x)=\Psi(\varepsilon)\int_0^\infty\exp\left\{-\int_0^t\left[\sum_{j=1}^{|\nu|}h_{\nu j}(z_1+\alpha_{\nu1}y,\cdots,z_{|\nu|}+\alpha_{\nu|\nu|}y)\right.\right.$$

$$\left.\left.+\lambda_\nu(z_1+\alpha_{\nu1}y,\cdots,z_{|\nu|}+\alpha_{\nu|\nu|}y)\right]dy\right\}\sum_{\mu:r(\nu,\mu)=m}\lambda_{\nu\mu}^{(1)}(z_1+\alpha_{\nu1}t,\cdots,$$

$$z_{|\nu|}+\alpha_{\nu|\nu|}t)dt=\int_0^\infty\exp\left\{-\frac{1}{\Psi(\varepsilon)}\int_0^t\left[\sum_{j=1}^{|\nu|}h_{\nu j}\left(z_1+\frac{1}{\Psi(\varepsilon)}\alpha_{\nu1}y,\cdots,z_{|\nu|}\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+\frac{1}{\Psi(\varepsilon)}\alpha_{\nu|\nu|}y\right)+\lambda_\nu\left(z_1+\frac{1}{\Psi(\varepsilon)}\alpha_{\nu1}y,\cdots,z_{|\nu|}+\frac{1}{\Psi(\varepsilon)}\alpha_{\nu|\nu|}y\right)\right]dy\right\}$$

$$\sum_{\mu:r(\nu,\mu)=m}\lambda_{\nu\mu}^{(1)}\left(z_1+\frac{1}{\Psi(\varepsilon)}\alpha_{\nu1}t,\cdots,z_{|\nu|}+\frac{1}{\Psi(\varepsilon)}\alpha_{\nu|\nu|}t\right)dt.$$

$P_2^{(m)}(x,A)$——多维随机向量$\left(\mu,z_1+\frac{1}{\Psi(\varepsilon)}\alpha_{\nu1}\tau,\cdots,z_{|\nu|}+\frac{1}{\Psi(\varepsilon)}\alpha_{\nu|\nu|}\tau\right)$进入$A$集的

概率，其中对任意$\mu: r(\nu,\mu)=m$，该μ和τ进入$(t, t+dt)$区间的概率为

$$\frac{1}{P_1^{[m]}(x)}\exp\left\{-\frac{1}{\Psi(\varepsilon)}\int_0\left[\sum_{j=1}^{\nu}h_\nu\left(z+\frac{1}{\Psi(\varepsilon)}a_{\nu 1}y,\cdots,z_{1\nu}\right.\right.\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\Psi(\varepsilon)}a_{\nu 1\nu}y\right)+\lambda_\nu\left(z_1+\frac{1}{\Psi(\varepsilon)}a_{\nu 1}y,\cdots,z_\nu+\frac{1}{\Psi(\varepsilon)}a_{\nu\nu 1}y\right)\Big]dy\Big\}_{\nu\mu}$$

$$\times\left(z+\frac{1}{\Psi(\varepsilon)}a_{\nu 1}t,\cdots,z_{1\nu}+\frac{1}{\Psi(\varepsilon)}a_{\nu\nu}t\right)dt.$$

现在来研究$m=0$的情形。令$x=(\nu,z)=(\nu,z_1,\cdots,z_{\nu 1})$。于是，$P^{[0]}(x,A)=P_1^{[0]}(x)P_2^{[0]}(x,A)$，式中$P_1^{[0]}(x)=\sum_{j=1}^{\nu}u(\nu,z)$，$P_2^{[0]}(x,A)$——由下列条件决定的随机向量$(\mu, z_1',\cdots,z_{\nu 1}')$进入$A$集的概率。令$(\mu,j,\tau)$——任意给定$\mu,j,\tau$的三维随机向量，其进入区间$(t,t+dt)$的概率为

$$\frac{1}{P_1^{[0]}(x)}\exp\left\{-\frac{1}{\Psi(\varepsilon)}\int_0\left[\sum_{i=1}^{\nu}h_\nu\left(z_1+\frac{1}{\Psi(\varepsilon)}a_{\nu 1}y,\cdots,z_{\nu 1}\right.\right.\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\Psi(\varepsilon)}a_{\nu\nu 1}y\right)+\lambda_\nu\left(z_1+\frac{1}{\Psi(\varepsilon)}a_{\nu 1}y,\cdots,z_{\nu 1}\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{\Psi(\varepsilon)}a_{\nu\nu 1}y\right)\right]dy\Big\}h_{\nu j}\left(z_1+\frac{1}{\Psi(\varepsilon)}a_{\nu 1}t,\cdots,z_{1\nu 1}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\Psi(\varepsilon)}a_{\nu 1\nu 1}t\right)p_{\mu}^{(j)}dt.$$

这样，μ由该条件决定，而$z_i'=z_i+a_{\nu i}\tau/\Psi(\varepsilon)$，$1\leqslant i\leqslant j$；$z_i=z_{i+1}+a_{\nu i+1}\tau/\Psi(\varepsilon)$，$j<i\leqslant\mu$。

$P^{[m]}(x,A)$与x有关的多维随机向量分量一样，也与用常数因子乘x有关的随机变量分布一样，完全决定于上述条件。于是，可直接使用上一节的算法。

现有的对$P^{[m]}(x,A)$的估计仍然与（9.25）式的估计一致。当$m\geqslant 1$时，（9.29）式成立；而当$m=0$时，显然有$\int_X |P^{(0)[m]}(dx)| \leqslant K_0^m$。

其次，当$m\geqslant 1$时，由于有（9.30）、（9.31）式，所以

$$\int_X |P^{(m)}(x_0,dx)|\leqslant P_0^{[m]}(x_0)\leqslant\frac{1}{a}K^m.$$

当$m=0$时，

$$\int_X |P^{[0]}(x_0,dx)|\leqslant 1.$$

这样，当$c=\max\{K_0,K,K/a\}$时，就满足了（9.25）式。

文献[83]介绍了监控系统的数学模型，此模型可用之描述复杂系统不同功能的子系统中某些部件之间的信号传输路径。文献[85]研究了状态最佳编码问题，这种编码可大大减少输入计算机的信息量和运算量。

利用一维部件和两级监控路径概念的模块法是在БЭСМ-6电子计算机上用复杂系统模块法的程序包实现的。复杂系统模块是以模块组成的结构。这样与加载模块数动态模拟相结

合，就能最大限度地节省计算机内存。设计复杂系统程序包的一般原理见文献[90]。文献[87]介绍了程序包的输入语句。这样，在使用可靠性和大规模维修理论术语时，能给用户以很丰富的内容进行研究。

应用程序包的软件包括能确定高可靠性系统概率指标的程序包。高可靠性系统指标计算的分析统计法可以用这些程序包来研究。文献[86]介绍了在用分析统计法和直接用模块法计算单部件系统的无故障工作概率时，计算时间与实现数的比较。当用分析统计法时，获得时间方面的效益为150倍。在时间方面的这种收益是由于研究了复杂系统状态跳跃的子程序包。在计算机积极参予工作时，如果用户掌握了有关的各种不同情况的答案集（此时，用户应给出出现某些形式的答案集和在荧光屏上显示），就可以积极地应用。

如果没有上述快速的规范化的方法，则在问题状态解对话的过程中，将会导致系统模型与操作干预的不协调。

第三篇　可靠性和可用性的最优化问题

第十章　技术维修问题及其数学分析法

§10.1　概　述

如果系统的可靠性很低，则在使用和维修中就会带来严重的损失和降低其可用性。但是，即使系统本身具有高可靠性也不能保证高可用性。因此，必须研究关于使用维修管理或科学的维修策略。当然，应使技术系统的维修策略最优，这就有可能仅仅从合理组织技术维修方面来提高可用性。

系统的研制人员较其它人能更好地掌握系统，了解系统在可靠性方面的强弱点以及熟悉其特性。此外，在研制阶段，能够改变系统的结构以便保证实现其原有的功能而改善维修性。所以，在研制系统的各阶段，应该拟定对系统各部分的最优维修策略。

为了拟定系统的最优维修策略，就要估计系统的可靠性和维修性特征量、系统的特点（如，故障和失效的显示性质、系统具有内部自动监控系统及系统结构的特点）及维修管理条件（气象条件、到修理基地的距离、备份器材的充足程度、维修组织及实施各种维修工作的临时机动组织等等）。

一般，系统的可靠性用新系统工作到首次发生故障的时间ξ的分布函数表示：$F(x)=P(\xi<x)$。而部件到首次发生故障时刻前的时间可用部件的分布函数表示。

系统的维修性特征量用完成修复工作时间的分布表示。而维修工作及其相互间的关系通常是已知的。

在技术维修的最优化问题中，系统的故障显示性质具有重要作用。而故障的显示与系统内部的自动监控系统及其使用程序有关。假设内部自动监控系统及其使用程序是在设计阶段拟定的，它具有独立地自动显示技术系统故障的性质（即，无需维护人员、自动地显示）。令故障的自动显示时间为ζ，即可用从故障发生的时刻到自动显示故障的时刻之间的时间为测定故障自动显示性质的特征量。

在下面所研究的模型中，若随机变量ξ和ζ是独立的，除给出分布函数$F(x)$以外，还要给出$\Phi(x)=P(\zeta<x)$。在模型中，若随机变量ξ和ζ是相关的，就必须给出联合分布函数

$$F(x,y)=P(\xi<x,\zeta<y),F(x,\infty)=F(x),F(\infty,y)=\Phi(y).$$

现举例说明故障自动显示的特性。假设对系统各部分进行连续地内部自动检测（连续检测程序），则可认为故障的自动显示时间有可能等于零，即故障是瞬时显示。

$$\Phi(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0;\\ 1, & x>0.\end{cases}$$

可以说，如果没有内部自动检测，则系统不能在有限的时间内自动地显示故障。于是$\Phi(x)=0$。

如果只对系统的一部分连续地进行内部检测，则当被检测部分的部件发生故障时，故障的显示时间等于零；而当未被检测的部件发生故障时，故障的显示时间等于按$\Phi_1(x)$分布的随机变量。于是

$$\Phi(x)= \begin{cases} ,x\leqslant, \\ b+(1-b)\Phi_1(x),x> \end{cases}$$

式中 b ——系统被检查部分已发生故障条件下的条件概率。

无故障工作时间、修复的持续时间、故障的显示时间以及一系列其它特征量决定着系统的状态和这些状态随时间的变化，这些变化关系可以用某些随机过程$x(t)$来描述。根据随机过程的取值决定进行哪种维修和维修周期。请注意，过程$x(t)$的空间描述决定于技术维修策略，即根据哪种信息决定对系统进行何种维修工作和维修周期。

然而，在许多情况下，不能观察到系统的真实状态$x(t)$。譬如，如果故障自动显示时间ζ不都等于零，那么就不知道哪些部件已经发生故障，甚至不知道系统已经工作了多长时间。在这种情况下，按照所观察到的系统状态做出关于修复系统的决定，可能与真实状态有出入。

如上所述，对维修策略提出非常严格的要求，维修策略应当在任何方面都是最优的、最好的。因此，应该给出数量化特征量。根据这些特征量可以判断选择维修策略的水平和系统功能的质量特征量。这里采用泛函作为这种特征量，而泛函在随机过程$x(t)$中的许多可能轨迹是一定的，因此泛函又决定于系统及其部件的无故障工作时间的分布函数、更新时间以及其它特征量的分布函数，而这些特征量又决定于维修策略和维修周期。

这样一来，很自然就提出选择最优维修策略的问题，在给定系统可靠性维修性以及故障显示特性的条件下，且在给定维修工作及其对系统状态影响等条件下决定技术维修策略。这时系统的功能特征量最好采用极限值。

不难指出在给出：1)随机过程$x(t)$；2)可能解的集合；3)在过程$x(t)$许多轨迹上确定的泛函，寻要求决定最优维修策略时，这样提出问题同一些随机过程的最优管理问题是一致的。在观察过程$x(t)$的组成部分时，将遇到所需数据不充足的管理问题。

对于所使用维护的技术系统，必要的特性并非总是知道得很准确，它同无故障工作时间的分布函数$F(y)$、更新时间以及故障自动显示时间的分布函数$\Phi(x)$有关。一般，根据统计数据来确定这些特性，而统计数据是通过对系统或系统部件的各种试验得到的。

根据可靠性的各种试验方案，有可能对各特征量进行估计。但，往往偏重于对无故障工作时间经验分布函数的估计。例如，假设对N个相同部件进行可靠性试验，在一些固定的时刻$y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$观察，统计在每一时刻y_i有哪些部件发生故障和哪些部件未发生故障。如果试验的部件数N很大，那么可以根据统计数据相当准确地判定在时刻y_i系统发生故障概率π_i的估计值，并可确定这些概率的置信区间。那么，如果系统在这些试验之后进行使用，有系统的可靠性特征量同不知道，但可以断言，无故障工作时间分布函数$F(y)$属于分布函数集，在分布函数集在给定各点$y=(y_0=0,y_1,y_2,\cdots,y_n,y_{n+1}=\infty)$上取给定值$\pi=(\pi_0=0,\pi_1,\pi_2,\cdots,\pi_n,\pi_{n+1}=1)$或属于集合$A=(A_1,A_2,\cdots,A_n)$

如果用(y,π)表示分布函数集，该分布函数在给定的各点y上取值π；而如果用

$\Omega(n, y, A)$表示分布函数集，该分布函数在各点y上从给定的集合A里取值，于是我们得到条件

$$F(y) \in \Omega(n, y, \pi) \text{或} F(y) \in \Omega(n, y, A). \tag{10.1}$$

根据各种试验方案所得到的信息，可用矩法确定系统无故障工作时间的估计值（例如，测出各试验系统的正常工作总时间）。因而，可以说明系统无故障工作时间分布函数集具有一定特性。譬如，如果根据试验结果相当准确地确定无故障工作时间的数学期望估计值，那么，可以说正随机变量的各可能分布都具有相同的数学期望估计值。在这种情况下，不能确定无故障工作时间真实的分布函数$F(y)$是哪一个，而仅仅知道函数属于这一集合。如果用$M=\int_0^{\infty} x dF(x)$表示系统无故障工作时间的数学期望，而用$\Omega(M)$表示具有数学期望为M的正随机变量分布函数集，那么

$$F(y) \in \Omega(M) \tag{10.2}$$

如果根据试验数据求出数学期望M和方差$D=\int_0^{\infty} x^2 dF(x)$的估计值，那么，根据方差可以缩小函数$F(y)$的可能集($\Omega(M) \supset \Omega(M, D)$)。式中$\Omega(M, D)$表示具有数学期望M和方差D的正随机变量分布函数集。但，仍不能确定$F(y)$的具体形式，而只能判断

$$F(y) \in \Omega(M, D). \tag{10.3}$$

上述各分布函数与故障自动显示时间的分布函数$\Phi(x)$有关。但，为了得到关于分布函数$\Phi(x)$所必要的统计数据，就要增加费用。因为在这种条件下，必须从大量试验中测出故障显示时间，这就往往要增加辅助设备。如果没有为了确定此分布的统计数据，也没有别的任何信息，则应该认为对这一分布函数是没有约束的。但是，当这一函数属于正随机变量分布函数集$\Phi(0)=0$时例外。

引出上述例子，一方面是说明上述情况的典型性，在必须解决维修策略时，当系统可靠性没有足够的信息或没有信息的条件下怎样进行决策；另一方面是说明所提出的问题有很大变化的条件下怎样进行决策。

首先，要指出上述例子是在典型约束条件下的例子，可以用函数$F(y)$的某些线性泛函等式或不等式表示。实际上，(10.1)式的后一条件是指函数$F(y)$满足于下式

$$\int_0^{\infty} u_k(x) dF(x) \in A_k, \quad k=1, 2, \cdots, n.$$

式中

$$u_k(x)=\begin{cases}0, & x>y_k; \\ 1, & x \leqslant y_k.\end{cases}$$

(10.2)和(10.3)式的条件可以写成下列形式：

$$\int_0^{\infty} x^k dF(x)=\mu_k, \quad k=1, 2.$$

式中

$$\mu_k=\begin{cases}M, & k=1; \\ D, & k=2.\end{cases}$$

其次，要指出一个极其重要的情形。在很多情况下，不能只从可能的分布函数集中选择一个"中间代表"，而还应考虑最坏的处理方法。在与"天赋"或与"无所不在无所不知的敌方"的游戏比赛中，具有冲突的情况是博奕所特有的，在这种形势下，假设"敌方"熟悉我方策略而选择其策略，对我方是最坏的而对敌方是最好的。为了解决用博奕论选择游戏的最优策略，就要利用最小最大化原理。对于讨论的问题，可归纳如下：

令 $I_1, I_2, \cdots$ 表示 [illegible] 指

标）。此泛函决定于系统的可靠性特性，其中包括无故障工作时间分布函数$F(y)$和实施预防性维修工作周期的分布函数。在不确定的条件下，建议使用最小最大化原理解函数$G(x)$，该函数可使函数$F(y)$的最坏分布F^*（从所有可能的分布中得出的）的可靠性特征量达到最大值。

$$I^* = I(F^*,G^*) = \max_G \min_F (F,G).$$

下面进一步解释上述论点。一般对于不明确的条件下根据最小最大化原理可以解出系统可靠性特征量的某个保证值I^*。如果系统无故障工作时间的真实分布函数$F(y)$与$F^*(y)$不一致（$F(y) \neq F^*(y)$），则

$$I^* = \min_F I(F,G^*) \leqslant I(F,G^*). \tag{10.4}$$

（10.4）式说明，如果根据函数G^*的计算结果进行预防性维修时，可靠性特征量的真值$I(F,G^*)$将比I^*大些。即，在这种条件下是能保证$I = I^*$的。如果根据其它特征量确定预防维修函数$G(x)$时，那末由于满足$I^* = I(F^*,G^*) \geqslant I(F^*, G)$，在函数$F$的可能集里找！！这种形式（例如，$F^*$），对于这种形式的工作质量特征值可能小于保证的特征值（真实分布函数F可能与F^*一致）。因此，离开G^*的特征值可能导致可靠性特征量的下降，这就意味着可用性的损失。

可见，问题可归结为根据分布函数集考查某一函数的极值，此集是从线性约束的有限集中算出来的。极值可以用函数具备一定集及形式的泛函极值寻找方法中得到。关于该寻找方法将在下节中讨论。

§ 10.2 对分式线性泛函极值的研究

本节将研究分式线性泛函

$$I(F) = U(F)/V(F). \tag{10.5}$$

式中U和V分别表示在某一分布函数$F(x)$（$x \subset R^{(n)}$，$n > 1$）的集合中的线性泛函。

定理10.1 令$U(F)$和$V(F)$决定了函数$F(x)$，$x \in R^{(n)}$，$n \geqslant 1$，U在分布函数集Ш的某一子集Ш中一致有界，于是泛函（10.5）式存在，令泛函$V(F)$在Ш中，且仍然保留使用上述符号（如，$V(F) \geqslant \delta > 0$）。在这种情况下，如果存在$\max\limits_{F \in Ш} I(F) = c$，则

$$\{F : I(F) = \max_{\Phi \in Ш} I(\Phi)\} = \{F : J(F) = \max_{\Phi \in Ш} J(\Phi)\}. \tag{10.6}$$

式中

$$J(\Phi) = U(\Phi) - cU(\Phi). \tag{10.7}$$

如果$\max\limits_{F \in Ш} I(F)$不存在，那么无限序列集$\{F_l\}$，$F_l \in Ш$，$l = 1,2,\cdots$，对于任何$l$及$\lim\limits_{l \to \infty} I(F_l) = \sup\limits_{F_l \in Ш} I(F) = c$的条件下，同无穷序列集$\{\Phi_l\}$，$l = 1,2,\cdots,\Phi_l \subset Ш$且

$$\lim_{l \to \infty} J(\Phi_l) = \sup_{F \in Ш} J(F) = 0 \tag{10.8}$$

是一致的

证明 如果$\max\limits_{F \in Ш} I(F) = c$存在，并且在$Ш_0 \subseteq Ш$内达到，则对任何$\Phi \in Ш$具有不等式

$$U(\Phi)/V(\Phi) \leqslant c \text{或} U(\Phi) - cV(\Phi) \leqslant 0.$$

因为，当$\Phi \in Ш$时，根据定理的条件$V(\Phi) > 0$。从而

$$\sup_{\Phi \in Ш} J(\Phi) = \sup_{\Phi \in Ш}[U(\Phi) - cV(\Phi)] \leqslant 0.$$

对于函数$F\in Ш_0$满足等式

$$I(F)=U(F)-cV(F)=0. \qquad (10.9)$$

因此，对于泛函（10.7）有最大值存在，且等于零：$\max\limits_{\Phi\in Ш} I(\Phi)=0$。由不等式（10.9）可得出

$$Ш_0=\{F:I(F)=0\}\cap Ш.$$

用逆包含来证明其正确性。令$\Phi\in\{F:I(F)=0\}\cap Ш$。于是，由（10.7）式的定义得到

$$I(\Phi)=U(\Phi)-cV(\Phi)=0\text{或}U(\Phi)/V(\Phi)=I(\Phi)=c.$$

因为$V(\Phi)\neq 0$。但是，后一等式说明$\Phi\in Ш_0$。因而

$$Ш_0=\{F:I(F)=0\}\cap Ш.$$

于是，等式（10.6）证毕。

如果$\max\limits_{F\in Ш} I(F)$不存在，则$\sup\limits_{F\in Ш} I(F)=c<\infty$。由于对任何函数$F\in Ш$，泛函$U(F)$一致有界，以及$V(F)\geq\delta>0$，最后的不等式成立。于是，能找到分布函数的无限序列$\{F_l\}$，$l=1,2,\cdots$。这些函数在

$$\lim_{l\to\infty} I(F_l)=c. \qquad (10.10)$$

的条件下，$F_l\in Ш$和$I(F_l)<c$，因此，满足（10.10）式性质的分布函数无限序列集不是空集。对于属于该集合的任一序列$\{F_l\}$，$l=1,2,\cdots$，对于任一$\varepsilon>0$，都可找到$l_0=l_0(\varepsilon)$满足

$$I(F_l)>c-\varepsilon, \qquad l>l_0. \qquad (10.11)$$

因为$F_l\in Ш$，所以$J(F_l)=U(F_l)-cV(F_l)<0$。此外，当$l>l_0$时，根据（10.11）式和$V(F_l)>0$的条件可得到不等式$J(F_l)>-\varepsilon V(F_l)$的结论。因而，当$l>l_0$时

$$-\varepsilon V(F_l)<J(F_l)<0. \qquad (10.12)$$

不等式（10.12）的意义是

$$\sup_{\Phi\in Ш} J(\Phi)=0\text{和}\lim_{l\to\infty} J(F_l)=0,$$

即，$\{F_l\}$属于无限序列集，而无限序列集满足条件（10.8）式。

下面证明其逆的正确性。首先指出，根据常数c的定义知，当$F\in Ш$时，$J(F)\leq 0$。我们取序列$\{\Phi_l\}$，$l=1,2,\cdots$，而$\Phi_l\in Ш$和$\lim\limits_{l\to\infty} J(\Phi_l)=0$。当此情况下，对于任何$\varepsilon>0$，都可找到$l_0=l_0(\varepsilon)$使得当$l>l_0$时，$-\varepsilon<J(\Phi_l)\leq 0$，或

$$-\varepsilon<U(\Phi_l)-cV(\Phi_l)\leq 0. \qquad (10.13)$$

由不等式（10.13）与条件$V(\Phi_l)\geq\delta>0$，当$l>l_0$时，得出

$$0\geq\frac{U(\Phi_l)}{V(\Phi_l)}-c>-\frac{\varepsilon}{V(\Phi_l)}\geq-\frac{\varepsilon}{\delta}. \qquad (10.14)$$

因为当任何$\varepsilon>0$和$l>l_0(\varepsilon)$时，不等式（10.14）都是正确的，所以，$\lim\limits_{l\to\infty} I(\Phi_l)=c$。定理证毕。

已证明了当泛函$I=U/V$的极值函数集与专门选择的结构更简单的泛函$J=U-cV$一致时，有可能使泛函I的极值函数计算问题更简单。其实，如果能成功地证明泛函J的极值是某一确定函数（如，有奇变点或有不大于k个生长点的函数），则泛函I的极值函数可以在已知的有限集中找到（如，按退化的分布函数集）。这个方法在下节里运用。

§10.3 在线性约束下对分式线性泛函极值函数形式的研究

下面将研究确定分布函数具体形式的方法，在这些函数里获得分式线性泛函（10.5）式的极值。此时应特别注意：证明在极值函数中存在着有限个生长点的函数值。在此情况下，可使极值计算问题大大地简化，并能将其简化为在线性约束下研究多变量函数的极值问题。

1．研究泛函

$$I(F)=\frac{U(F)}{V(F)}=\frac{\int_{-\infty}^{+\infty}A(x)\mathrm{d}F(x)}{\int_{-\infty}^{+\infty}B(x)\mathrm{d}F(x)} \tag{10.15}$$

的极值，其约束条件为

$$I_i(F)=\int_{-\infty}^{+\infty}u_i(x)\mathrm{d}F(x)=\pi_i,\quad i\in I=\{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}. \tag{10.16}$$

式中

$$u_i(x)=\begin{cases}1, & x\leqslant y_i;\\ 0, & x>y_i.\end{cases}$$

不难看出，在给定函数$u_i(x)$的条件下，约束条件（10.16）是指被研究的分布函数集$\Pi=\Omega(n,y,\pi)$，而分布函数在给定的点y_i上取值为π_i。

用Ш表示分布函数集，对于这些函数，存在着泛函$I_i(F)$（$i\in I$）。令$A(x)$和$B(x)$限制在$x\in R^{(1)}=(-\infty,\ +\infty)$上，则下述定理是正确的。

定理10.2 如果在$F\in Ш\cap\Pi$时，泛函$V(F)$的包含符号不变（如，$V(F)\geqslant\delta>0$），并存在$\max\limits_{F\in Ш\cap\Pi}I(F)=c<\infty$，则可在泛函（10.15）式的极值函数中找到一阶跃函数，其在每一半开区间$[y_s,y_{s+1})$内的生长点不大于1个。

证明 应用定理10.1，并将问题简化成更简单的泛函来研究。由于满足定理10.1的所有条件，于是

$$\{F: I(F)=\max_{\Phi\in Ш\cap\Pi}I(\Phi)\}=\{F: J(F)=\max_{\Phi\in Ш\cap\Pi}J(\Phi)=0\}.$$

式中$J(\Phi)$由（10.7）式求出。

将y_i排成顺序序列：$-\infty=y_0<y_1<y_2<\cdots<y_n<y_{n+1}=+\infty$，则$0=\pi_0\leqslant\pi_1\leqslant\pi_2\leqslant\cdots\leqslant\pi_n\leqslant\pi_{n+1}=1$，因为在相反的情况下，$\Pi=\phi$。

可将泛函$J(F)$写成以下形式

$$J(F)=\sum_{s=0}^{n}\int_{y_s}^{y_{s+1}-0}C(x)\mathrm{d}F(x),C(x)=A(x)-cB(x).$$

现在不难看出，存在着极值函数，在每一半开区间$[y_s,\ y_{s+1})$上函数的生长点不多于1个。如果$\pi_s=\pi_{s+1}$，当$x\in[y_s,\ y_{s+1})$时，$F(x)$是常数（没有生长点，而$\int_{y_s}^{y_s+1-0}C(x)\mathrm{d}F(x)=0$）。我们允许$\pi_s<\pi_{s+1}$。

下面我们研究在区间$[y_s,\ y_{s+1})$上（$s=0,\ 1,\ \cdots,\ n$）的函数$C(x)$，可以断言函数$C(x)$的最大值：

① 存在，并在点$x_s^{(0)}\in[y_s,\ y_{s+1})$上达到；

② 存在，并在点$x_s^{(0)}=y_{s+1}$上达到；

③ 不存在，当$x\in[y_s, y_{s+1}]$时。

如果在全部$s=0, 1, \cdots, n$，满足假设①，则

$$F^*(x)=\begin{cases}\pi_s, & y_s\leqslant x\leqslant x_s^{(0)},\\ \pi_{s+1}, & x_s^{(0)}<x\leqslant y_{s+1}.\end{cases} \tag{10.17}$$

并得出任何分布函数$F\in \mathrm{III}\cap\mathrm{II}$

$$J(F)=\sum_{s=0}^{n}\int_{y_s}^{y_{s+1}-0} C(x)\mathrm{d}F(x)\leqslant\sum_{s=0}^{n}\Big[\max_{x\in[y_s, y_{s+1}]} C(x)\Big]\int_{y_s}^{y_{s+1}-0}\mathrm{d}F(x)$$

$$=\sum_{s=0}^{n} C(x_s^{(0)})(\pi_{s+1}-\pi_s)=J(F^*).$$

因为由(10.17)式的定义知$F^*\in \mathrm{III}\cap\mathrm{II}$，于是$F^*$是极值函数，$J(F^*)=\max\limits_{F\in\mathrm{III}\cap\mathrm{II}} J(F)$。根据定理10.1知它是泛函$J$的极值函数。

应指出，那怕是$s=0, 1, 2, \cdots, n$中只有一个不能满足 假设①（或②和③）的情形，则将导致矛盾。令有某一s，在任何$x\in[y_s, y_{s+1})$时，

$$C(x)<\sup_{x\in[y_s, y_{s+1})} C(x).$$

而对任何分布函数$F\in \mathrm{III}\cap\mathrm{II}$，有

$$\int_{y_s}^{y_{s+1}-0} C(x)\mathrm{d}F(x)<\Big[\sup_{x\in[y_s, y_{s+1})} C(x)\Big]\int_{y_s}^{y_{s+1}-0}\mathrm{d}F(x)$$

$$=(\pi_{s+1}-\pi_s)\sup_{x\in[y_s, y_{s+1})} C(x) \tag{10.18}$$

存在，同时存在阶跃函数F_0^*，它在$[y_s, y_{s+1})$上有一个生长点$\tilde{x}_s$，对此

$$\int_{y_s}^{y_{s+1}-0} C(x)\mathrm{d}F(x)<\int_{y_s}^{y_{s+1}-0} C(x)\mathrm{d}F_0^*(x). \tag{10.19}$$

首先，利用不等式（10.18）证明不等式（10.19）。由（10.18）式可导出

$$\varepsilon=\sup_{x\in[y_s, y_{s+1})} C(x)-\frac{1}{\pi_{s+1}-\pi_s}\int_{y_s}^{y_{s+1}-0} C(x)\mathrm{d}F(x)>0. \tag{10.20}$$

然后，计算点$\tilde{x}_s\in[y_s, y_{s+1})$满足条件

$$C(\tilde{x}_s)>\sup_{x\in[y_s, y_{s+1})} C(x)-\varepsilon. \tag{10.21}$$

（根据上确界的定义知存在着这样的点）。令

$$F_0^*(x)=\begin{cases}\pi_s, & y_s\leqslant x\leqslant\tilde{x}_s;\\ \pi_{s+1}, & \tilde{x}_s<x\leqslant y_{s+1}.\end{cases}$$

则由不等式（10.20）和（10.21）可得出不等式（10.19）。（10.19）式的意义：函数$F(x)$可以构成阶跃函数$F_0^*(x)$，它在每一区间$[y_s, y_{s+1})$上只有一个生长点，因此$J(F)<J(F_0^*)$。

因为任何函数$F\in \mathrm{III}\cap\mathrm{II}$存在着阶跃函数$F_0^*$，对该函数来说，泛函$J$的值较$F$的值更精确，所以极值函数集只能由在$[y_s, y_{s+1})$上仅有一个生长点的函数组成。但是，在此集内极值函数是不存在的。实际上，根据上确界的定义，从属于此集的任何函数$F_*(x)$中找出的函数

$F_2(x)$也属于这一集，而

$$\int_{y_s}^{y_{s+1}-0} C(x)dF_1(x) < \int_{y_s}^{y_{s+1}-0} C(x)dF_2(x).$$

最后的不等式表示泛函$I(F)$不存在极大值，而这与定理的条件矛盾。按定理10.2的条件，泛函$I(F)$有极大值（根据定理10.1的推论泛函$I(F)$有极大值）。产生此矛盾的原因是假定有一个s（即使只有一个）的半开区间$[y_s, y_{s+1})$上不存在函数$C(x)$的极大值。这样就证明了用等式（10.17）求出的分布函数$F^*(x)$是极值函数。

定理10.2给出了极值函数的形式。现在将求极值的问题简化为根据分布函数集Ш*求泛函$I(F)$的极值问题。此泛函在每一半开区间上的生长点不多于1个，

$$\max_{F\in Ш\cap\Pi} I(F) = \max_{F\in Ш^*} I(F)$$

$$= \max_{\substack{x_i\in[y_i,y_{i+1})\\ i=0}} \frac{\sum_{i=0}^{n} A(x_i)[\pi_{i+1}-\pi_i]}{\sum_{i=0}^{n} B(x_i)[\pi_{i+1}-\pi_i]}. \tag{10.22}$$

根据变量（x_0, x_1, …, x_n）研究函数值式（10.22）的同时，求出极大值（$x_0^{(0)}$, $x_1^{(0)}$, …, $x_n^{(0)}$）。根据极值点和（10.17）式可以完全确定极值函数$F^*(x)$。

在一般情况下，确定极值（10.22）的问题可能很困难，但，在预防性维修任务中可以提出一个很重要的假设，以便使对（10.22）式的研究简单化。

令$\Omega(n,\mathbf{y},\boldsymbol{\pi})$表示分布函数集，分布函数在给定的各点$\mathbf{y}=(y_0,y_1,\cdots,y_n)$上取确定的值$\boldsymbol{\pi}=(\pi_0,\pi_1,\cdots,\pi_n)$，$Ш=\Omega(n,\mathbf{y},\boldsymbol{\pi})$（这里引用新的符号$\mathbf{y}$和$\boldsymbol{\pi}$，以便强调$\mathbf{y}$和$\boldsymbol{\pi}$的向量关系）。在集合$\Omega(n, \mathbf{Y}, \boldsymbol{\pi})$中，规定以下对应关系：即如果对于任何$x>0$满足不等式$F_1(x)\geqslant F_2(x)$，那么函数$F_1$比$F_2$"坏些"。在集合$\Omega(n,\mathbf{y},\boldsymbol{\pi})$中存在着"最坏的"分布函数$F^*(x)$，该函数在$y_k=y_k+0$（$k=0$, 1, …, n）各点上有$\triangle x_k=\pi_{k+1}-\pi_k$的跳跃值。于是，假设可用下式描述：

$$\min_{F\in\Omega(n,\mathbf{y},\boldsymbol{\pi})} I(F)=I(F^*),$$

换句话说，函数（10.22）对于变量x_i是单调的。

现在来叙述单调性的极简单的充分条件。让我们来研究泛函

$$I(F)=\frac{\int_{-\infty}^{\infty} a(x)dF(x)}{\int_{-\infty}^{\infty} b(x)dF(x)}.$$

在$F\in Ш$时的极值，Ш表示某一分布函数集，包函所研究的泛函，且存在两个函数F_*，$F^*\in Ш$。在对任一函数$F\in Ш$，$x\in(-\infty, +\infty)$时，存在$F^*(x)\geqslant F_*(x)$，那么，下述辅助定理成立。

辅助定理10.1 如果函数$a(x)$不减，且函数$b(x)>0$不增，则对于$F\in Ш$泛函$I(F)$有极大值和极小值存在。即

$$\max_{F\in Ш} I(F)=I(F_*);\ \min_{F\in Ш} I(F)=I(F^*).$$

如果函数$a(x)$不增，而函数$b(x)>0$不减，则

$$\max_{F\in Ш} I(F)=I(F^*);\quad \min_{F\in Ш} I(F)=I(F_*).$$

证明 由辅助定理的条件知

$$\int_{-\infty}^{\infty} a(x)\mathrm{d}F(x)\leqslant\int_{-\infty}^{\infty} a(x)\mathrm{d}F_*(x).$$

由于当$F(x)\geqslant F_*(x)$及函数$a(x)$不减时，

$$\int_{-\infty}^{\infty} a(x)\mathrm{d}[F(x)-F_*(x)]=-\int_{-\infty}^{\infty}[F(x)-F_*(x)]\mathrm{d}a(x)\leqslant 0,$$

类似地有

$$\int_{-\infty}^{\infty} b(x)\mathrm{d}F(x)\geqslant\int_{-\infty}^{\infty} b(x)\mathrm{d}F_*(x)>0.$$

因此，对于任何$F\in Ш$，$I(F)\leqslant I(F_*)$，可以证明辅助定理的第一个论点。而其余论点的证明与此类似。

请注意，对于任何有限区间(α,β)，在$F(\alpha)=F_*(\alpha)=F^*(\alpha)$，$F(\beta)=F_*(\beta)=F^*(\beta)$的条件下，该定理10.1都成立。

在预防性维修的问题中，根据$F\in\Omega(n, y, \pi)$取极值。对于此集存在着分布函数$F^*(y)$在$y=y_i+0$的各点上有$\triangle\pi_i$的跳跃，但不存在函数$F_*(y)\in\Omega(n, y, \pi)$。我们限制最后一个区间$(y_n, y_{n+1}<\infty)$，并认为$F\in\Omega(n, y, \pi)$，$F(y_{n+1}+0)=1$（在相反的情况下，当$y=\infty$时，可能发生函数$F_*(y)$的最后跳跃$\triangle\pi_n=1-\pi_n$，而积分可能不存在，即$F_*\notin Ш$）。记

$$F_*(y)=\begin{cases}0, & -\infty<y<y_1;\\ \pi_k, & y_k\leqslant y<y_{k+1},\ k=1, \cdots, n;\\ 1, & y\geqslant y_{n+1}.\end{cases}$$

此函数在各点上取确定值，但它不是分布函数。因为它不是右连续的。于是，下列系是正确的。

系1 若函数$a(x)$不减，且函数$b(x)>0$不增，则

$$I(F_*)=\sup_{F\in\Omega(n, y, \pi)} I(F).$$

如果函数$a(x)$不增，且函数$b(x)>0$不减，则

$$I(F_*)=\inf_{F\in\Omega(n, y, \pi)} I(F).$$

此结论的证明是根据对任意$\varepsilon>0$找出这样两个函数$F_i\in\Omega(n, y, \pi)$ $(i=1, 2)$而得到的。即，如果$a(x)$不减，而$b(x)>0$不增，则$I(F_1)>I(F_*)-\varepsilon$，以及如果$a(x)$不增，而$b(x)>0$不减，则$I(F_2)<I(F_*)+\varepsilon$。

系2 对于泛函

$$I(F)=\frac{\iint A(x,y)\mathrm{d}F(x)\mathrm{d}G(y)}{\iint B(x,y)\mathrm{d}F(x)\mathrm{d}G(y)},$$

式中$F(x)$，$G(y)$表示某些分布函数。如果对任意确定的y，对$A(x, y)$不减，而$B(x, y)>0$不增，则有$\max\limits_{F\in\Omega(n, y, \pi)} I(F)=I(F_*)$成立。

证明 令

$$a(x)=\int A(x,y)\mathrm{d}G(y),\quad b(x)=\int B(x,y)\mathrm{d}G(y).$$

因为系2的条件中表明，函数$a(x)$不减，且函数$b(x)>0$不增，则根据辅助定理10.1可证明

系2成立。

2. 研究泛函的极值

$$I(F)=\frac{U(F)}{V(F)}=\frac{\int A(x)\mathrm{d}F(x)}{\int B(x)\mathrm{d}F(x)}. \tag{10.23}$$

式中 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in R^{(n)}$ 是有界函数。根据分布函数集Ш，对于该函数集存在泛函$I(F)$，而泛函$V(F)=\int B(x)\mathrm{d}F(x)$的符号不变(如,$V(F)\geq\delta>0$),没有其它限制。

由函数$A(x)$的有界性得出泛函$U(F)$的有限性，从而满足定理10.1的全部条件，并可将问题归结为对更简单的泛函$J(F)$的研究。

假设$\max\limits_{F\in Ш} I(F)=c<\infty$存在，于是问题将得到证明。这时，根据定理10.1知泛函极值函数集$I(F)$和$J(F)=U(F)-cV(F)=\int[A(x)-cB(x)]\mathrm{d}F(x)=\int C(x)\mathrm{d}F(x)$的集合相等，且存在着泛函$J(F)$的极大值。

应指出，存在着$\max\limits_{x\in R^{(n)}} C(x)$，但，假设不存在极大值。于是，对于任何$x\in R^{(n)}$，$C(x)<\sup\limits_{y\in R^{(n)}} C(y)$以及对任何分布函数$F\in Ш$来说，绝对不等式$J(F)<\sup\limits_{x\in R^{(n)}} C(x)$是正确的，因此，存在着函数 $F^*(x)=\prod\limits_{i=1}^{n} F^*(x_i)$ (10.24)

式中

$$F^*_i(x_i)=\begin{cases}0, & x_i\leq\tilde{x}_i;\\ 1, & x_i>\tilde{x}.\end{cases}$$

此函数有$J(F^*)>J(F)$（为了证明这一论点，我们详细地复述在§10.3中已导出的积分$\int_{y_i}^{y_i+0} C(x)\mathrm{d}F(x)$的推理即可（参看公式（10.19）～（10.21）））。这就是说，极值分布函数集只能用（10.24）式形式的函数组成。但，在此极值分布函数集中，没有$J(F_1^*)<J(F_2^*)$这样的函数。因为从包含函数$F_1^*(x)$的集合中找出的函数$F_2^*(x)$也属于该集合。而这与存在$\max\limits_{F\in Ш} I(F)$的假设是矛盾的。

总之，我们得出了$\max\limits_{x\in R^{(n)}} C(x)$存在的结论。它在某一点$x^{(0)}=(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)})$上达到极值。那么由等式（10.24）求出的函数$F^*(x)$在$\tilde{x}=x^{(0)}$时，是极值函数，因为对任何分布函数$F(x)$皆有不等式

$$J(F)\leq\max_{x\in R^{(n)}} C(x)=C(x^{(0)})=J(F^*).$$

函数F^*是极值函数，而且泛函$I(F)$也是极值函数。

这样，确定了极值函数的形式，而泛函（10.23）的极值计算问题可简化为计算函数$A(x)$、$B(x)$ $(x\in R^{(n)})$的极大值问题。因为极大值点（x^0）能确定极值函数的具体表达式。因此，要证明下述定理。

定理10.3 设在$x\in R^{(n)}$时，$A(x)$和$B(x)$是有界函数，如果在分布函数集Ш里存在着泛函（10.23）的极大值，则在某一退化分布函数里达到。

$$\max_{F\in Ш} I(F)=\max_{F\in Ш}\frac{\int A(x)\mathrm{d}F(x)}{\int B(x)\mathrm{d}F(x)}=\max_{F\in Ш^*} I(F)=\max_{x\in R^{(n)}}\frac{A(x)}{B(x)}.$$

式中$Ш^*$表示退化分布函数集。

这里对极值函数（10.24）作如下说明。泛函（10.23）达到极值的分布函数$F^*(x)$是由n个独立随机变量ξ_1，ξ_2，…，ξ_n决定的，依概率从每一变量中取一个值$\xi_i=x$（随机变量ξ_i的分布有一个生长点$x_i=x_i^0$）。

系3 在定理10.3的条件中，对于泛函

$$I(F_1,\cdots,F_n)=\frac{\int\cdots\int A(x_1,\cdots,x_n)\,\mathrm{d}F_1(x_1)\cdots\mathrm{d}F(x_n)}{\int\cdots\int B(x_1,\cdots,x_n)\,\mathrm{d}F_1(x_1)\cdots\mathrm{d}F_n(x_n)}, \tag{10.25}$$

如果存在极大值，则在退化分布函数里达到。

$$\max_{F_i,\,i=1,\cdots,n} I(F_1,\cdots,F_n)=\max_{x\in R^{(n)}}(A(x)/B(x)).$$

证明 根据多维分布函数的集合取泛函（10.25）的极值，其函数的分量不受总和的限制。因为极值函数在更普遍的情况下（在定理10.3中，根据任意相关分量的分布函数集取极值），属于独立分量的分布函数集，于是可直接用定理10.3得出系3是正确的。

第十一章　不考虑系统结构时的维修策略

§11·1　概　　述

本章在研究维修策略时将不考虑技术系统的内部结构，而把它当作一个整体来看。从这一观点出发，假定任何维修工作都是使系统更新。即，完成维修工作后，系统无故障工作时间的分布都服从同一分布$F(x)=P(\xi<x)$。维修工作具有以下特点，它影响系统的使用寿命，或者因维修要消耗一些时间。

1．在维修开始时刻系统的状态。如果在维修开始时，系统有工作能力，即实施维修的目的是预防系统发生故障，则称这种维修为预防维修。如果维修开始时，系统无工作能力，实施维修的目的是恢复系统的工作能力，即消除事故（故障）的后果，则称这种维修为应急维修。

2．及时准备实施维修的条件。如果维修工作开始的时刻是已知的，实施维修工作时可以事先做好准备，则称这种维修为计划维修。如果实施维修工作的开始时刻是随机的，则称这种维修工作为计划外维修，这种维修时间比规定的维修时间要长

在[7]中阐述了维修工作的分类

现在来确定评价维修工作水平的特征量、根据该特征量实现维修过程的最优化。下面引用两个特征量：维修度（完成维修任务的概率）和日历时间的平均单位时间利润，即利润率因为这些特征量能包含实践中应用的许多其它特征量（如可用度、平均费用等）。

可以用不同方法确定这些特征量。但由于通常这些特征量是系统在使用期内确定的，于是在使用期范围未知的条件下进行研究就很困难。在本章里，我们用随机过程$x(t)$在各轨迹上积累各个泛函作为这些特征量，仅仅从这唯一的观点出发进行研究。而随机过程$x(t)$是描述系统状态瞬时变化的；此外，我们将限制研究的随机过程$x(t)$的类型、并假设系统的可能状态（随机过程$x(t)$）集$E=\{e_1,\cdots,e_n\}$是有限集。在这种情况下，随机过程的轨迹是阶跃函数。根据此随机过程$x(t)$的各轨迹求出泛函。在时刻t前随机过程$x(t)$的轨迹给出转移次数为m，该过程转移的时刻为$0=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_m\leqslant t$，以及对应的状态为$e_{i_0},e_{i_1},\cdots,e_{i_m}$。在轨迹上的各状态位于各转移时刻之间、于是，可像确定数学期望一样确定泛函的数学期望

$$M\left\{\sum_{k=0}^{m-1}c_{i_k}(t_{k+1}-t_k)+c_{i_m}(t-t_m)\right\},\tag{11.1}$$

式中常数c_i——在状态e_i时得出的利润率。如果维护使用的时间很长（$t\to\infty$），则泛函（11.1）趋于无穷大。所以必须研究利润率，即

$$I=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}M\left\{\sum_{k=0}^{m-1}c_{i_k}(t_{k+1}-t_k)+c_{i_m}(t-t_m)\right\}.\tag{11.2}$$

当给随机过程$x(t)$某些限制时，极限（11.2）存在性的证明是一个专门的课题，本章只研究再生随机过程[69]。在这些假设下，证明极限（11.2）的存在

可以将（11.1）式改写成$\sum_{i=1}^{n} c_i MX_i(t)$的形式。式中$X_i(t)$——在$[0,t]$区间上随机过程$x(t)$在状态$e_i$逗留的时间。可将（11.2）式写成

$$I=\sum_{i=1}^{n} c_i \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}MX_i(t)=\sum_{i=1}^{n} c_i K_i \tag{11.3}$$

的形式。

在（11.3）中的各极限可理解为：在无限长时间内，随机过程$x(t)$处于状态e_i的相对时间。从另一方面看，如果在研究中引入事件$\{x(t)=e_i\}$的状态变量

$$\delta_i(t)=\begin{cases}0, & x(t)\neq e_i;\\ 1, & x(t)=e_i.\end{cases}$$

那么，可以写成

$$MX_i(t)=\int_0^t M\delta_i(\tau)d\tau=\int_0^t P(x(\tau)=e_i)d\tau.$$

于是，表达式

$$\frac{1}{t}MX_i(t)=\frac{1}{t}\int_0^t P\{x(\tau)=e_i\}d\tau \tag{11.4}$$

具有概率意义。即，在$[0,t]$上均匀分布的随机时间τ内事件$\{x(\tau)=e_i\}$发生的概率。因此，可以将$K_i=\lim_{t\to\infty}(1/t)MX_i(t)$作为概率看待。即，在均匀分布的随机时间$\tau\subset[0,\infty)$的事件$\{x(\tau)=e_i\}$发生的概率。

为了证明极限（11.4）存在，引用再生过程的极限定理[69]。该定理是：在相邻两再生时刻之间的时间z_k的数学期望为有限值$Mz_k<\infty$，以及函数

$$\mu_i(\tau)=P\Big(x\Big(\sum_{m=0}^{k}z_m-\tau\Big)=e_i,\ z_{k+1}>\tau\Big),\qquad k\geq 1.$$

可积的条件下，断定下述极限存在并有等式

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t P(x(\tau)=e_i)d\tau=\frac{1}{Mz_k}\int_0^\infty \mu_i(\tau)d\tau \tag{11.5}$$

成立。这时，如果满足极限条件，则由（11.4）式可得出极限（11.3）存在的结论。可见，对于随机过程的研究可归结为对于再生时刻之间的时间里过程状态的研究。其中，特别是系数$K_i=MX_i/MX$，是相邻两个再生时刻之间随机过程$x(t)$在状态e_i逗留的平均时间MX_i与再生周期的平均持续时间MX之比。下面证明此论点。

根据概率的定义

$$\mu_i(\tau)=\int_\tau^\infty P\Big(x\Big(\sum_{m=0}^{k}z_m+\tau\Big)=e_i,\ z_{k+1}=y\Big)d\Psi(y),\quad \Psi(y)=P(z_k<y).$$

于是

$$\int_0^\infty \mu_i(\tau)d\tau=\int_0^\infty\int_\tau^\infty P\Big(x\Big(\sum_{m=0}^{k}z_m+\tau\Big)=e_i\,|\,z_{k+1}=y\Big)d\Psi(y)\,d\tau$$

$$=\int_0^\infty d\Psi(y)\int_0^y P\Big(x\Big(\sum_{m=0}^{k}z_m+\tau\Big)=e_i\,|\,z_{k+1}=y\Big)d\tau.$$

如上所述，如果在研究过程中引入事件$\{x(t)=e_i\}$，那么在再生周期$z_{k+1}=y$的条件下，在

再生周期上的积分是再生周期里随机过程$x(t)$在状态e_i逗留时间的条件数学期望，所得到的(11.5)式能说明上述论点是正确的。还要指出，在下面研究的维修模型中，由于系统的生存时间和维修时间的数学期望都是有限的，所以函数h_i是可积的。

总之，对于再生过程来说，可求出泛函I为

$$I=\sum_{i=1}^{n}c_iK_i=\sum_{i=1}^{n}c_i\frac{MX_i}{MX}=\frac{1}{MX}\sum_{i=1}^{n}c_iMX_i,$$

式中K_i——再生周期里随机过程$x(t)$在状态e_i逗留的平均时间与该周期的平均持续时间之比。特别是由此总定义出发，可得到要求的特征量。

1. 完成任务的概率$R(z)$ 系统在状态e_1逗留的定义：系统处于有工作能力的状态，并且无故障工作的时间大于z。于是，假设利润率$c_1=1$，而$c_i=0$ $(i=2,3,\cdots,n)$，完成任务的概率$R(z)=K_1=MX_1/MX$。MX_1可理解为在很长时间的维护使用中，系统在状态e_1逗留的平均时间的相对值。由(11.4)式可知，也可理解为在时刻z内的随机时间τ $(\tau\in[0,\infty))$内事件$\{x(\tau)=e_1\}$发生的概率（参看(11.4)式）。在计算可用度K_r时，应规定$z=0$，$K_r=R(0)$。

2. 利润率 平均单位时间的利润。计算这一指标时，假定$z=0$，$c_1>0$，其它系数是负的，即，在有工作能力的状态e_1的单位时间里产生利润c_1，而在其它状态产生损失。于是可得出，如果在再生过程轨迹上确定总利润泛函，那么可以用再生周期的平均利润与该周期的平均持续时间之比来表示。本章所研究的技术系统维修策略将引用系统的功能质量指标的概念。

最后要指出，本节所得出的结果可用来计算再生周期内的利润，比利润的表达式为$\sum\limits_{i=1}^{n}c_i(X_i)$。式中$X_i$——再生周期里随机过程$x(t)$在状态$e_i$逗留的时间；$c_i$——任意函数（以前曾研究过它是线性的，$c_i(t)=c_it$）。于是，平均利润率的泛函是

$$I=\sum_{i=1}^{n}Mc_i(X_i)/MX.$$

§11·2 技术维修策略概述

令系统无故障工作时间ξ的分布函数为$F(x)=P(\xi<x)$。假设系统已发生故障，但仍在运行，故障自动显示时间不是瞬时的，而是经过某一随机时间ζ，ζ的分布函数为$\Phi(x)=P(\zeta<x)$。又假设随机变量ξ与ζ是相关的（在同一再生周期内），并且已知其联合分布为

$$F(x_1,x_2)=P(\xi<x_1,\zeta<x_2),\quad F(x_1)=\lim_{x_2\to\infty}F(x_1,x_2),$$

$$\Phi(x_2)=\lim_{x_1\to\infty}F(x_1,x_2).$$

系统在开始使用的时刻$t=0$，在规定的使用时间η时实施计划的预防性定期维修，η的分布函数为$G(x)=P(\eta<x)$。如果到规定的时间η前系统未发生故障$(\xi>\eta)$，则在时刻η开始计划的预防性维修，按规定使系统完全更新。令γ_1为完成此计划的预防性维修的期限，且其分布函数$F_1(t)=P(\gamma_1<t)$。如果到规定的时间η前系统已发生故障，但没有自动显示出来$(\xi+\zeta\geq\eta)$，则在时刻η进行应急维修，其维修期限为γ_2，γ_2的分布函

数为$F_2(t)=P(\gamma_2<t)$。最后，如果未到规定时刻η系统发生了故障（$\xi\leqslant\eta$），并且在时刻η前显示出来（$\varepsilon+\xi<\eta$），则在故障显示的时刻开始应急的计划外维修，维修期限为γ_3，γ_3的分布函数为$F_3(t)=P(\gamma_3<t)$。

系统经过维修而达到更新水平的时刻就是下一次计划的预防性维修周期开始的时刻，以后，重复全部维修过程。

下面，研究在任意时刻t描述系统状态的随机过程$x(t)$，同时令

$$x(t)=\begin{cases}e_1, & \text{如果在时刻 } t \text{ 系统有工作能力，而且已工作的时间大于 } z\text{；}\\ e_2, & \text{如果在时刻 } t \text{ 系统有工作能力，而且已工作的时间小于 } z\text{；}\\ e_3, & \text{如果在时刻 } t \text{ 系统处于无工作能力的状态（潜在故障）；}\\ e_4, & \text{如果在时刻 } t \text{ 系统正在进行计划的预防性维修状态；}\\ e_5, & \text{如果在时刻 } t \text{ 系统处于正在进行应急维修的状态；}\\ e_6, & \text{如果在时刻 } t \text{ 系统处于正在进行计划外应急维修的状态。}\end{cases}$$

在描述技术维修策略时，可以用状态转移图来表示随机过程$x(t)$的转移关系，如图11.1所示。

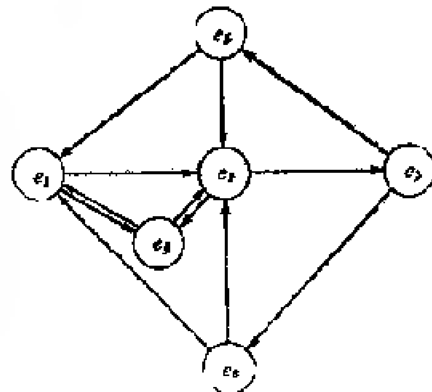


图11.1

应该指出，随机过程$x(t)$的一个重要性质。由于随机过程$x(t)$转移为状态e_1的时刻就是其完全更新的时刻，所以随机过程$x(t)$未来的性状与过去的性状无关。亦即，这些时刻就是再生时刻，而随机过程$x(t)$本身也是再生过程。在计算系统的功能质量特征量表达式时，我们将利用这一性质。

这里要研究两个问题：求功能质量特征量同$G(x)$的关系，$G(x)$——规定计划的预防性定期维修周期的分布函数；求使功能质量特征量达到最大值的$G_0(x)$，即求实施计划的预防性定期维修最佳周期。

§11·3 完成任务概率的研究

所谓确定系统随机过程$x(t)$的再生时刻是指确定系统转移到状态e_1的时刻。把随机过程在再生周期内在状态e_i逗留的平均时间MX_i与在同一周期内平均持续时间MX之比作为系统完成任务的概率。下面，求这些数。如果知道了随机过程已转移到状态e_1，则系统功能正常时间的分布函数为

$$F_z(y)=P(\xi_z<y)=\begin{cases}\ldots, & y\leqslant z;\\ \dfrac{F(y)-F(z)}{\overline{F}(z)}, & y>z,\end{cases}$$

式中 $\overline{F}(z)\ldots$

若$\{\xi=y,\ \zeta=v,\ \eta=x\}$，并且随机过程已转移到状态$e_2$，即$y>z$，则令函数$A(x,y,v)$为系统在状态$e_2$逗留时间的条件数学期望。下面来求$A(x,y,v)$。很明显

$$A(x,y,v)=A_z(x,y)=\min(x,y-z)\text{。}$$

于是
$$MX_1=\int_0^\infty\int_z^\infty A_z(x,y)\frac{\mathrm{d}F(y)}{\overline{F}(z)}\mathrm{d}G(x)=\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{\widetilde{A}_z(x,y)}{\overline{F}(z)}\mathrm{d}F(y)\mathrm{d}G(x)\text{。}$$

式中 $\widetilde{A}_z(x,y)=\min(x,\max(0,y-z))$。

最后，存在

$$MX_1=\frac{1}{\overline{F}(z)}\int_0^\infty\left[\int_z^{z+x}(y-z)\mathrm{d}F(y)+\int_{z+x}^\infty x\mathrm{d}F(y)\right]\mathrm{d}G(x)$$

$$=\frac{1}{\overline{F}(z)}\int_0^\infty\left[\int_0^x \overline{F}(u+z)\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}G(x)\text{。}$$

为了求出随机过程$x(t)$再生周期的平均持续时间，我们再引用条件数学期望的公式

$$M\widetilde{X}=\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty B(x,y,v)\mathrm{d}F_z(y,v)\mathrm{d}G(x)\text{。}$$

式中$B(x,y,v)$——在$\{\xi=y,\ \zeta=v,\ \eta=x\}$的条件下，随机过程$x(t)$再生周期持续时间的条件数学期望。

$$F_z(y,v)=P(\xi<y,\zeta<v|\xi>z)=\frac{P(z<\xi<y,\zeta<v)}{P(\xi>z)}$$

——当$\xi>z$时，ξ和ζ的联合分布。依定义

$$F_z(y,v)=\begin{cases}0,\quad y<z;\\ \dfrac{1}{\overline{F}(z)}\displaystyle\int_z^y\int_0^v\mathrm{d}\Gamma(x_1,x_2),\quad y\geqslant z\text{。}\end{cases}$$

下面，求函数$B(x,y,v)$。首先指出，在再生周期内，随机过程$x(t)$在有工作能力的状态e_2的逗留时间可能是该周期的几倍。因此，在$\{\xi=y,\ \zeta=v,\ \eta=x\}$的条件下，再生周期是由两部分组成的。即系统从进入状态e_1的时刻到第一次开始维修的时间，第一次开始维修的时刻到进入状态e_1的时刻。

在$\{\xi=y,\ \zeta=v,\ \eta=x\}$的条件下，令$b_i(x,y,v)$为再生周期的第$i$部分（$i=1,2$）持续时间的数学期望。于是，依§11·2中叙述的维修策略可得到

$$b_1(x,y,v)=\begin{cases}y+v+\overline{T}_{\text{аП}},\quad 0\leqslant v<x,\quad 0\leqslant y<x-v;\\ x+T_{\text{аП}},\quad 0\leqslant v<x,\quad x-v\leqslant y<x;\\ x+T_{\text{ПП}},\quad 0\leqslant v<x,\quad y\geqslant x;\\ x+T_{\text{ПП}},\quad v\geqslant x,\quad y\geqslant x;\\ x+T_{\text{аП}},\quad v\geqslant x,\quad y<x\text{。}\end{cases}\tag{11.6}$$

式中 $\overline{T}_{\text{аП}}=M\gamma_3$；$T_{\text{аП}}=M\gamma_2$；$T_{\text{ПП}}=M\gamma_1$；

$$b_2(x,y,v)=\sum_{k=1}^\infty kF^{k-1}(z)\overline{F}(z)\int_0^\infty\int_z^\infty\int_0^t b_1(t,u,w)\frac{\mathrm{d}\Gamma(u,w)\mathrm{d}G(t)}{\overline{F}(z)}$$

$$= \frac{1}{\bar{F}(z)}\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^t b_1(t,u,w)\mathrm{d}F(u,w)\mathrm{d}G(t).$$

于是 $B(x,y,v)=b_1(x,y,v)+b_2(x,y,v)$;

$$\mathrm{M}\widetilde{X}=\frac{1}{\bar{F}(z)}\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty b_1(x,y,v)\mathrm{d}F(y,v)\mathrm{d}G(x). \tag{11.7}$$

式中$b_1(x,y,v)$依等式（11.6）求出，将（11.6）式代入（11.7）式便得到

$$\mathrm{M}\widetilde{X}=\frac{1}{\bar{F}(z)}\int_0^\infty\Big[\int_0^x\Psi(t)\mathrm{d}t+\mathrm{M}\gamma_1+(\mathrm{M}\gamma_2-\mathrm{M}\gamma_1)F(x)$$

$$+(\mathrm{M}\gamma_3-\mathrm{M}\gamma_2)\Psi(x)\Big]\mathrm{d}G(x).$$

式中 $F(x)=P(\xi+\zeta<x)=\int\int_0^x \mathrm{d}F(x_1,x_2)$; $\Psi(x)=1-\Psi(x)$.

最后，得到$R(z)$关于$G(x)$的分式——线性泛函表达式

$$R(z)=R(z,G)=\frac{\int_0^\infty A(t,z)\mathrm{d}G(t)}{\int_0^\infty B(t)\mathrm{d}G(t)}. \tag{11.8}$$

式中 $A(t,z)=\int_0^t\bar{F}(x+z)\mathrm{d}x$;

$$B(t)=\int_0^t\Psi(x)\mathrm{d}x+\mathrm{M}\gamma_1+(\mathrm{M}\gamma_2-\mathrm{M}\gamma_1)F(t)+(\mathrm{M}\gamma_3-\mathrm{M}\gamma_2)\Psi(t). \tag{11.9}$$

为了求最佳函数$G_0(t)$，$G_0(t)$使$R(z,G)$达到极大值，即$R(z,G_0)=\max R(z,G)$，引用在$n=1$时的定理10.3。该定理证明能在退化分布函数集Ш*中找到极值

$$G(t)=\begin{cases}0, & t\leqslant\tau;\\ 1, & t>\tau.\end{cases} \tag{11.10}$$

在$\mathrm{M}\gamma_i$和$\mathrm{M}\xi$受自然约束的条件下，对于所研究的情形满足定理10.3的全部条件。例如，可以认为$\mathrm{M}\xi\leqslant c$，$c\geqslant\mathrm{M}\gamma_1>0$，于是当$t\geqslant 0$时，$B(t)>0$，而$A(x)$是有限函数，因此存在$\max R(z,G)$。应用此定理可以把计算$\max R(z,G)$的问题变为计算分式

$$R_t(z)=\frac{A(t,z)}{B(t)}=\frac{\int_0^t\bar{F}(x+z)\mathrm{d}x}{\int_0^t\Psi(x)\mathrm{d}x+\mathrm{M}\gamma_1+(\mathrm{M}\gamma_2-\mathrm{M}\gamma_1)F(t)+(\mathrm{M}\gamma_3-\mathrm{M}\gamma_2)\Psi(t)} \tag{11.11}$$

的极大值问题。此外，此定理还可以证明（11.11）式的极大值τ_0就是所要计算的计划的预防性定期维修的最优周期。若微分（11.11）式，并令其为零（如果存在导数的话），便可得出实施计划的预防性定期维修的最优周期方程

$$\frac{\mathrm{M}\gamma_1}{\mathrm{M}\gamma_2-\mathrm{M}\gamma_1}=-F(t)+\lambda(t)\frac{\bar{F}(t)}{\bar{F}(t+z)}\int_0^t\bar{F}(x+z)\mathrm{d}x$$

$$+\frac{1}{M\gamma_2-M\gamma_1}\left\{[\overline{\Psi}(t)+(M\gamma_3-M\gamma_2)\Psi'(t)]\frac{\int_0^t\overline{F}(x+z)dx}{\overline{F}(t+z)}\right.$$

$$\left.-(M\gamma_3-M\gamma_2)\Psi(t)-\int_0^t\overline{\Psi}(x)dx\right\}. \qquad (11.12)$$

式中 $\lambda(t)=F'(t)/\overline{F}(t)$——系统的故障率。

必须指出，解方程（11.12）的工作量与在各离散点上计算函数（11.11）相当。由于第二种方法的结果能给出较多的信息，所以它比较受欢迎。应用方程（11.12）可得出两个结论：一是存在着有限根，二是经过有限时间实施计划的预防性定期检修是合理的。为了简化对可用度的研究，我们假设 $z=0$，$M\zeta<\infty$，$M\gamma_3>M\gamma_2>M\gamma_1>0$。首先指出，当 $M\xi=\infty$ 时，$\lim_{t\to\infty}R_t(z)=0$。因此，如果 $M\zeta=\infty$，则实施计划的预防性定期维修是合理的。其次认为 $M\xi<\infty$。用 $a(t)$ 表示方程（11.12）的右端，在 $z=0$ 时

$$a(t)=F(t)+\lambda(t)\int_0^t F(x)dx+\frac{1}{M\gamma_2-M\gamma_1}\left\{[\Psi(t)\right.$$

$$\left.+(M\gamma_3-M\gamma_2)\Psi'(t)]\frac{\int_0^t F(x)dx}{F(t)}-(M\gamma_3-M\gamma_2)\Psi(t)-\int_0^t\overline{\Psi}(x)dx\right\}.$$

$$(11.13)$$

当 $t=0$ 时，$a(0)=0$ 并且不等式 $M\gamma_1(M\gamma_2-M\gamma_1)>a(0)$ 都成立。因此，当 $t=0$ 时，（11.11）式的导数是正的。如果，

$$M\gamma_1/(M\gamma_2-M\gamma_1)<\lim_{t\to\infty}a(t) \qquad (11.14)$$

则方程（11.12）只有一个根，而函数（11.11）在右端点上取最大值。条件（11.14）是使函数（11.11）在右端点上取最大值的充分条件。

令 $\lim_{t\to\infty}\lambda(t)=\lambda(\infty)$，$\beta=\lim_{t\to\infty}[\Psi'(t)/F'(t)]$（如果这些极限存在的话），则由（11.13）式可得到

$$\lim_{t\to\infty}a(t)=-1+\lambda(\infty)M\xi+\frac{1}{M\gamma_2-M\gamma_1}\{\beta M\xi[1+$$

$$+(M\gamma_3-M\gamma_2)\lambda(\infty)]-(M\gamma_3-M\gamma_2)-M\xi-M\zeta\}.$$

因为 $\lim_{t\to\infty}[\Psi'(t)/F(t)]=\beta\lambda(\infty)$，$\int_0^\infty\Psi(x)dx=M\xi+M\zeta$。后一等式说明 $M(\xi+\zeta)=M\xi+M\zeta$。于是，条件（11.14）变为

$$M\gamma_3+M\xi[1-\lambda(\infty)(M\gamma_2-M\gamma_1)]<M\xi[1+\lambda(\infty)(M\gamma_3-M\gamma_2)]\beta-M\zeta.$$

$$(11.15)$$

现在来分析条件（11.15）。如果 $\lambda(\infty)<\infty$，$\beta<\infty$，则必须检验是否满足条件（11.15）。如果满足此条件，便可作出结论：经过有限时间实施计划的预防性定期维修是合理的。如果 $\lambda(\infty)=\infty$，则在其它参数的任何值时都能满足条件（11.15）。如果 $\beta=\infty$，则也能满足条件（11.15）。在这种情况下，要使 $\xi+\zeta$ 大就要使 ζ 大。可见，如果不进行预防性定期维修，则系统在长期使用中将处于潜在故障状态，可用度要变小

假设随机变量ξ和ζ是独立的，且服从参数为λ_1和λ_2的指数分布（在这种情形下，计划的预防性定期维修便可简化为只实施修复维修。于是$M\xi=\lambda_1^{-1}$，$M\zeta=\lambda_2^{-1}$，

$$\Psi'(t)=\begin{cases}0, & t\leqslant 0;\\ \lambda^2 te^{-\lambda t}, & t>0,\ \lambda_1=\lambda_2=\lambda;\\ \dfrac{\lambda_1\lambda_2 e^{-\lambda_2 t}}{\lambda_2-\lambda_1}(e^{(\lambda_2-\lambda_1)t}-1), & t>0,\ \lambda_1\neq\lambda_2.\end{cases}$$

$$\beta=\begin{cases}\infty, & \lambda_1\geqslant\lambda_2;\\ \lambda_2/(\lambda_2-\lambda_1), & \lambda_1<\lambda_2.\end{cases}$$

由此可知：

当$\lambda_1\geqslant\lambda_2$时，经过有限的使用时间，总是应该实施计划的预防性定期维修；

当$\lambda_1<\lambda_2$时，如果满足条件$\lambda_2\lambda_1^{-1}>\lambda_1(M\gamma_2-M\gamma_3)+(\lambda_2-\lambda_1)M\gamma_1$，经过有限的使用时间必须实施计划的预防性定期维修。

§11·4 平均利润率的研究

现在来研究再生随机过程$x(t)$轨迹的利润泛函。用$\zeta_i(\zeta_i=X_i)$表示随机过程$x(t)$在状态e_i逗留的时间（$i=0,1,\cdots,5$）（请阅§11.2随机过程$x(t)$的定义）。在再生周期内，$e_0=e_1\cup e_2$（原文为$e_1\cup e_3$——译注）。于是，在一个再生周期内总利润$\tilde{S}=c_0(\zeta_1+\zeta_2)-\sum\limits_{i=3}^{5}c_i(\zeta_i)$，式中$c_i(x)$——某些正的不减函数$c_i(+0)=0$。

首先，假定在几个周期内的利润是各周期的利润之和，即利润具有累加性。在此假设中，每单位日历时间的平均利润率（即平均利润率）等于再生周期的平均利润同该周期的平均持续时间之比，

$$S=M[c_0(\zeta_1+\zeta_2)-\sum_{i=3}^{5}c_i(\zeta_i)]/M\tilde{X}. \tag{11.16}$$

其次，假定$c_i(x)$及其分布的存在保证了$Mc_i(\zeta_i)$的存在。（11.16）式与（11.8）式的分母是一致的。为了求（11.16）式的分子，要写出当$t\geqslant 0$时，随机变量ζ_i的分布。

按技术维修策略的定义（请阅§11·2）可得出，对于状态$e_0=e_1\cup e_2$，

$$\zeta_0=\zeta_1+\zeta_2=\min(\xi,\eta).$$

于是

$$F_0^*(t)=P(\zeta_0<t)=1-\bar{F}(t)\bar{G}(t).$$

由此可见

$$Mc_0(\zeta_0)=\int_0^{\infty}c_0(t)d[1-\bar{F}(t)\bar{G}(t)]. \tag{11.17}$$

对于状态e_4

$$\zeta_4=\begin{cases}0, & \xi<\eta;\\ \gamma_4, & \xi\geqslant\eta.\end{cases}$$

于是

$$F_4^*(t)=P(\zeta_4<t)=P(\xi\leqslant\eta)+P(\xi>\eta)F_4(t)$$
$$=\int_0^{\infty}\bar{F}(x)dG(x)+F_4(t)\int_0^{\infty}\bar{F}(x)dG(x).$$

由此可见

$$Mc_4(\zeta_4)=\int_0^{\infty}\bar{F}(x)dG(x)\int_0^{\infty}c_4(t)dF_4(t). \tag{11.18}$$

对于状态c_5
$$\zeta_5=\begin{cases}0, & \xi\geqslant\eta \text{ 或 } \eta\geqslant\xi+\zeta;\\ \gamma_2, & \xi<\eta<\xi+\zeta.\end{cases}$$

于是

$$F_5^*(t)=P(\zeta_5<t)=1-P(\xi<\eta<\xi+\zeta)+P(\xi<\eta<\xi+\zeta)F_2(t)$$
$$=1-\overline{F}_2(t)\int_0^\infty\left[\int_0^x\int_{x-x_1}^{x} dF(x_1,x_2)\right]dG(x).$$

由此可见
$$Mc_5(\zeta_5)=\int_0^\infty\left[\int_0^x\int_{x-x_1}^\infty dF(x_1,x_2)\right]\left[\int_0^\infty c_5(t)dF_2(t)\right]dG(x). \tag{11.19}$$

对于状态c_6
$$\zeta_6=\begin{cases}0, & \xi+\zeta\geqslant\eta;\\ \gamma_3, & \xi+\zeta<\eta.\end{cases}$$

于是
$$F_6^*(t)=P(\zeta_6<t)=P(\xi+\zeta\geqslant\eta)+P(\xi+\zeta<\eta)F_3(t)$$
$$=\int_0^\infty\overline{\Psi}(x)dG(x)+F_3(t)\int_0^\infty\Psi(x)dG(x).$$

由此可见
$$Mc_6(\zeta_6)=\int_0^\infty\left[\Psi(x)\int_0^\infty c_6(t)dF_3(t)\right]dG(x). \tag{11.20}$$

对于状态c_3
$$\zeta_3=\max\{0,\min(\zeta,\eta-\xi)\}.$$

于是，当$t\geqslant 0$时，

$$F_3^*(t)=P(\zeta_3<t)=P(\max\{\min(\xi,\eta-\xi)\}<t)=P(\min(\zeta,\eta-\xi)<t)$$
$$=\int_0^\infty\left\{\iint_{\min(x_2,y-x_1)<t} dF(x_1,x_2)\right\}dG(y).$$
$$=1-\int_t^\infty\left[\int_0^{y-t}\int_t^\infty dF(x_1,x_2)\right]dG(y)=1-\int_0^\infty\int_t^\infty\overline{G}(x_1+t)dF(x_1,x_2).$$

由此可见
$$Mc_3(\zeta_3)=\int_0^\infty c_3(t)d\left\{\int_0^\infty\int_t^\infty\overline{G}(x_1+t)dF(x_1,x_2)\right\}. \tag{11.21}$$

泛函$Mc_i(\zeta_i)$ ($i=0,3,\cdots,6$) 对G是线性的，而用等式（11.16）求出的$S(G)$是分式——线性的。因此，可根据退化分布函数集（11.10）式计算泛函$S(G)$的极大值。

如果用（11.10）式求$G(x)$和如果存在密度$f(x_1,x_2)=\partial^2F(x_1,x_2)/\partial x_1\partial x_2$，则由（11.17）～（11.21）式可求出

$$Mc_0(\zeta_0)=c_0(\tau)\overline{F}(\tau)+\int_0^\tau c_0(t)dF(t);$$

$$Mc_3(\zeta_3)=\int_0 c_3(t)\left\{\int_t^\infty f(\tau-t,x_2)dx_2+\int_0^{\tau-t}f(x_1,t)dx_1\right\}dt;$$

$$Mc_4(\zeta_4)=\overline{F}(\tau)\int_0^\infty c_4(t)dF_1(t)=c_4\overline{F}(\tau);$$

$$Mc_5(\zeta_5)=\int_0^\tau\int_{\tau-x_1}^\infty f(x_1,x_2)dx_1dx_2\int_0^\infty c_5(t)dF_2(t)$$
$$=c_5\int_0^\tau\int_{\tau-x_1}^\infty f(x_1,x_2)dx_1dx_2;$$

$$Mc_6(\zeta_6)=\Psi(\tau)\int_0^\infty c_6(t)dF_3(t)=c_6\Psi(\tau)$$

用（11.19）式求（11.16）式的分母。于是，求实施计划的预防性定期维修最优周期的课题就可简化为求函数

$$S(G)=S(\tau)-\Big\{c_0(\tau)F(\tau)+\int_0^{\tau}c_0(t)\mathrm{d}F(t)$$

$$-\int_0^{\tau}c_3(t)\Big[\int_t^{\infty}f(\tau-t,x_2)\mathrm{d}x_2+\int_0^{\tau-t}f(x_1,t)\mathrm{d}x_1\Big]\mathrm{d}t$$

$$-c_4F(\tau)-c_5\int_0^{\tau}\int_{\tau-x_1}^{\infty}\mathrm{d}F(x_1,x_2)-c_6\Psi(\tau)\Big\}\Big[\int_0^{\tau}\overline{\Psi}(x)\mathrm{d}x+\mathrm{M}\gamma_1$$

$$+(\mathrm{M}\gamma_2-\mathrm{M}\gamma_1)F(\tau)+(\mathrm{M}\gamma_3-\mathrm{M}\gamma_2)\Psi(\tau)\Big]^{-1} \tag{11.22}$$

的极大值问题。式中$c_k=\int_0^{\infty}c_k(t)\mathrm{d}F_{k-3}(t)$，$k=4,5,6$；$\Psi(t)$——随机变量$\xi+\zeta$的分布；$F(x_1,x_2)$——随机变量$\xi$和$\zeta$的联合分布；$F_k(t)$——随机变量$\gamma_k(k=1,2,3)$的分布。

用标准方法解这个问题。如上所述，在选择好增量$\Delta\tau$以后，仅仅在各点$\tau_i=i\Delta\tau$上计算函数（11.22）比解方程$\mathrm{d}S/\mathrm{d}\tau=0$更好。

在研究函数（11.22）的极大值时，很自然地产生关于在端点上函数存在极大值的问题。这对于解关于实施计划的预防性定期维修最优周期问题是很重要的。

下面，研究独立随机变量ξ和ζ。因为$F(x_1,x_2)=F(x_1)\Phi(x_2)$，$f(x_1,x_2)=f(x_1)\times\varphi(x_2)$。再引用§11·3的概念：如果$\tau(\tau>\tau_0)$足够大和$\mathrm{d}S/\mathrm{d}\tau<0$，那么泛函$S(\tau)$在端点达到极值。

令$A_1(\tau)$为（11.22）式的分子；$B(\tau)$为（11.22）式的分母。于是，可将条件$\mathrm{d}S/\mathrm{d}\tau<0$写成$A_1'(\tau)B(\tau)<B'(\tau)A_1(\tau)$的形式。

从（11.9）式可得出，当$\tau\geqslant0$时，$B(\tau)>0$（如果在自然约束条件$\mathrm{M}\gamma_3>\mathrm{M}\gamma_2>\mathrm{M}\gamma_1$下）。此外，如果$F'(x)=f(x)$，$\Phi'(x)=\varphi(x)$以及$\Psi'(x)$存在，则

$$\lim_{\tau\to\infty}B'(\tau)=\lim_{\tau\to\infty}[\Psi(\tau)+(\mathrm{M}\gamma_2-\mathrm{M}\gamma_1)f(\tau)+(\mathrm{M}\gamma_3-\mathrm{M}\gamma_2)\Psi'(\tau)]=0$$

（这里暂不考虑$\xi+\zeta$广义分布的情形）。当$\tau\to+\infty$时，使函数$S(\tau)$减小的条件可写成

$$\lim_{\tau\to\infty}A_1'(\tau)<0 \tag{11.23}$$

如果考虑到等式

$$F(\tau)+\Psi(\tau)+\int_0^{\tau}\int_{\tau-x_1}^{\infty}\mathrm{d}F(x_1,x_2)=1,$$

则条件（11.23）就变为

$$\lim_{\tau\to\infty}\Big[c_1'(\tau)F(\tau)-c_3(\tau)f(0)\Phi(\tau)-\int c_3(t)\{f(\tau-t)\varphi(t)$$

$$+f'(\tau-t)\Phi(t)\}\mathrm{d}t\Big]<0. \tag{11.24}$$

条件（11.24）是确定计划预防性定期维修最优周期的充分条件。

下面，举例说明（11.24）式的应用。令

$$F(t)=\mathrm{e}^{-\lambda_1 t},\quad \overline{\Phi}(t)=\mathrm{e}^{-\lambda_2 t},\quad c_3(t)=\mathrm{e}^{k_3 t},$$

以及$c_0(t)$满足 $\lim_{\tau\to\infty}\mathrm{e}^{-\lambda_1\tau}c_0'(\tau)=0$,

于是

$$A_1^\xi(\tau)=e^{-\lambda_1\tau}c_0^\xi(\tau)+\frac{\lambda_1(\lambda_2-\lambda_1)}{\lambda_3+\lambda_1-\lambda_2}e^{-\lambda_1\tau}-\frac{\lambda_1\lambda_3}{\lambda_3+\lambda_1-\lambda_2}e^{-(\lambda_3-\lambda_2)\tau}.$$

显然，如果$\lambda_3\geqslant\lambda_2$，则满足条件（11.24）。可见，当$\lambda_3\geqslant\lambda_2$时，实施计划预防性定期维修是合理的（它完全决定于故障的自动显示速度和在潜在故障状态下损失函数的增长速度）。

现在，回过头来分析$\xi+\zeta$之和的广义分布。随机变量$\xi+\zeta=\infty$的概率是正值，亦即$P(\xi+\zeta=\infty)=\overline{\Psi}(\infty)>0$。对于实际系统来说，$P(\xi=\infty)=F(\infty)=0$。因为$\xi+\zeta=\infty$说明$\zeta=\infty$，亦即$P(\zeta=\infty)=\overline{\Phi}(\infty)>0$。于是

$$\lim_{\tau\to\infty}S(\tau)=\lim_{\tau\to\infty}\frac{-\int_0^\tau c_2(t)\mathrm{d}\Phi(t)}{\int_0^\tau\overline{\Phi}(t)\mathrm{d}t}\leqslant 0,$$

这说明，当计划的预防性定期维修周期很长时，这样使用系统会发生亏损，亦即，这是不合理的。

§11·5 特殊情形

如果规定在等式（11.22）中的$c_0(t)=t$，$c_k(t)=0(k=3,4,5,6)$，那么可得出可用度的表达式（假定$\varkappa=0$，然后可用（11.11）式得出类似的表达式）。在§11·4中曾指出，在端点上存在可用度最大值$K_r=R(0)$的问题。

现在来求系统正常工作时的平均损失率。假设$c_0(t)=0$，然后从等式（11.22）可得出对于日历时间的平均损失率表达式：

$$S(\tau)=\left\{\int_0^\tau c_3(t)\left[\int_t^\infty f(\tau-t,x)\mathrm{d}x+\int_0^{\tau-t}f(x,t)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}t+c_5+(c_4-c_5)\overline{F}(\tau)\right.$$

$$\left.+(c_6-c_5)\Psi(\tau)\right\}\left[\int_0^\tau\Psi(x)\mathrm{d}x+M\gamma_1+(M\gamma_2-M\gamma_1)F(\tau)+(M\gamma_3-M\gamma_2)\Psi(\tau)\right]^{-1}.$$

正常工作的损失率表达式为

$$C(\tau)=\frac{S(\tau)}{K_r}$$

$$=\frac{\int_0^\tau c_3(t)\left\{\int_t^\infty f(\tau-t,x)\mathrm{d}x+\int_0^{\tau-t}f(x,t)\mathrm{d}x\right\}\mathrm{d}t+c_5+(c_4-c_5)\overline{F}(\tau)+(c_6-c_5)\Psi(\tau)}{\int_0^\tau\overline{F}(x)\mathrm{d}x}.\tag{11.25}$$

然后，用标准方法进行研究。在此不赘述。

对工程有特别重要意义的是两种特殊情形：故障瞬时显示的情形

$$\Phi(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0;\\ 1, & x>0.\end{cases}\tag{11.26}$$

和无故障自动显示的情形$\Phi(x)\equiv 0$

下面，介绍这两种情形的结果（详见[7]）

故障瞬时显示的情形，将$L(x_1,x_2)=F(x_1)\Psi(x_2)$代入（11.11）式后，再用（11.26）式求出$\bar{\Psi}(\tau)$（在这种情形下$\Psi(t)=F(t)$）。于是

$$R_\tau(z)=\frac{\int_0^\tau \bar{F}(x+z)\mathrm{d}z}{\int_0^\tau \bar{F}(x)\mathrm{d}x+M\gamma_1+(M\gamma_3-M\gamma_1)F(\tau)}. \tag{11.27}$$

求（11.27）式的导数并使之等于零，便得到

$$\frac{M\gamma_1}{M\gamma_3-M\gamma_1}=\left\{-\frac{F(\tau+z)}{\bar{F}(\tau)}F(\tau)+\lambda(\tau)\int_0^\tau \bar{F}(x)\mathrm{d}x\right\}\frac{\bar{F}(\tau)}{\bar{F}(\tau+z)}$$

$$+\frac{1}{M\gamma_3-M\gamma_1}\left\{\frac{\bar{F}(\tau)}{\bar{F}(\tau+z)}\int_0^\tau \bar{F}(x+z)\mathrm{d}x-\int_0^\tau \bar{F}(x)\mathrm{d}x\right\}. \tag{11.28}$$

式中$\lambda(t)$为系统的故障率。

如果$M\gamma_3>M\gamma_1$，以及$\lim_{x\to\infty}\lambda(x)=\infty$，那么方程（11.23）只有一个根。这时，当$\tau=0$和$\tau=\infty$时，比较方程两端便可确信无疑，如果对该方程再加上单调性条件$\lambda'(\tau)>0$，那么在方程（11.23）的最小根处$R_\tau(z)$获得最大值。对于可用度可以规定$z=0$：$K_\Gamma=R_\tau(0)$。于是，方程可简化为

$$\frac{M\gamma_1}{M\gamma_3-M\gamma_1}=-F(\tau)+\lambda(\tau)\int_0^\tau \bar{F}(x)\mathrm{d}x. \tag{11.29}$$

函数$\alpha(\tau)=-F(\tau)+\lambda(\tau)\int_0^\tau \bar{F}(x)\mathrm{d}x$的导数符号与$\lambda'(\tau)$的一致。因为，$\alpha'(\tau)=\lambda'(\tau)\times\int_0^\tau \bar{F}(x)\mathrm{d}x$。所以在各单调区间上是一致的。例如，如果$M\gamma_1/(M\gamma_3-M\gamma_1)<-1+\lambda(\infty)M\xi$和$\lambda'(\tau)>0$（老化系统），则方程（11.29）只有相等的一个根，这个根能决定实施预防性定期维修的最优周期。

由（11.25）式可知，在故障瞬时显示的情形下，平均损失率为

$$C(\tau)=\frac{(c_6-c_4)F(\tau)+c_4}{\int_0^\tau \bar{F}(x)\mathrm{d}x}. \tag{11.30}$$

对函数（11.30）求导数并令其等于零，便可得

$$\frac{c_4}{c_6-c_4}=-F(\tau)+\lambda(\tau)\int_0^\tau \bar{F}(x)\mathrm{d}x. \tag{11.31}$$

因为此方程与（11.29）式是一致的，所以保持一个有限根存在的充分条件是$c_6>c_4$，$\lambda'(\tau)>0$，$\lim_{\tau\to\infty}\lambda(\tau)=\infty$。对于所研究的情形，根据（11.22）式可得出平均损失率表达式为

$$S(\tau)=\frac{c_0(\tau)\bar{F}(\tau)+\int_0^\tau c_0(t)\mathrm{d}F(t)-[c_4+(c_6-c_4)F(\tau)]}{\int_0^\tau \bar{F}(x)\mathrm{d}x+M\gamma_1+(M\gamma_3-M\gamma_1)F(\tau)}.$$

对于上式求导数并令其等于零，便可得

$$\frac{c_4}{c_0-c_4}=F(\tau)+\lambda(\tau)\int^{\tau}\overline{F}(x)dx+\frac{\lambda(\tau)}{c_0-c_4}(c_0 M\gamma_1-c_4 M\gamma_3)$$

$$+\frac{1+\lambda(\tau)(M\gamma_3-M\gamma_1)}{c_0-c_4}\int^{\tau}F(x)dc_0(x)-\frac{c_0'(\tau)}{c_0-c_4}\Big[M\gamma_1+(M\gamma$$

$$-M\gamma\ )F(\tau)+\int_0^{\tau}F(x)dx\Big].$$

从最后这个方程中可以得出有限根存在的充分条件：

$$c_4 M\gamma_1-c_4 M\gamma_3>0;\ (c_0 M\gamma_1-c_4 M\gamma_3)\lambda(0)<c_4+c_0'(0)M\gamma_1;$$

$$\lambda(\infty)\Big[c_0(M\xi+M\gamma_1)-c_4(M\xi+M\gamma_3)-(M\gamma_3-M\gamma_1)\int_0^{\infty}\overline{F}(x)dc_0(x)$$

$$+\int_0^{\infty}F(x)dc_0(x)\Big]>c_0+c_0'(\infty)(M\xi+M\gamma_3).$$

无故障自动显示的情形。将$\Phi(x)=\varphi(x)=0$，$x\in[0,\infty)$代入通用公式中，于是$F(x_1)\times\Phi(x_2)=0$，$\Psi(x)=0$。由等式（11.11）可得出

$$R_\tau(z)=\frac{\int_0^{\tau}F(x+z)dx}{\tau+M\gamma_1+(M\gamma_2-M\gamma_1)\overline{F}(\tau)}\ . \tag{11.32}$$

相应的方程（该方程的各根能决定函数（11.32）的极大值，以及实施计划预防性定期维修的最优周期）表达式为

$$\frac{M\gamma_1}{M\gamma_2-M\gamma_1}=F(\tau)+\lambda(\tau)\frac{F(\tau)}{F(\tau+z)}\int_0^{\tau}\overline{F}(x)dx+\frac{\int^{\tau}x\,dF(\tau+z)}{(M\gamma_2-M\gamma_1)\overline{F}(\tau+z)}\ . \tag{11.33}$$

不难证明，在自然约束条件下，（11.33）式有有限根存在，该根总是能够满足技术维修系统的：当$\tau\to\infty$时，$M\gamma_1>0$，$\int\overline{F}(x)dx=o(\tau)$。实际上，在已指出的假设中，可直接从（11.32）式得到$\lim\limits_{\tau\to}R_\tau(z)=\lim\limits_{\tau\to\infty}R_\tau(z)=0$的结论。如果考虑到任意$\tau\geqslant 0$，$R_\tau(z)\geqslant 0$，则可得到在端点$\tau_0<\infty$上$R_\tau(z)$获得极大值的结论。由此可见，方程（11.33）在端点上有且仅有一个根。

当$z=0$时，可由（11.32）式得到可用度的表达式

$$K_r(\tau)=\frac{\int_0^{\tau}\overline{F}(x)dx}{\tau+M\gamma_1+(M\gamma_2-M\gamma\ )F(\tau)}\ . \tag{11.34}$$

显然，对于论证在端点上存在极大值时，（11.34）式是很有用的。因为$\lim\limits_{\tau\to} K_r(\tau)$ $\lim\limits_{\tau\to\infty}K_r(\tau)=0$

将$f(x_1,x_2)=f(x_1)\varphi(x_2)$代入（11.25）式，并且当$x_2<\infty$和$\int\varphi(x)dx=1$时，$\varphi(x_2)=0$。由（11.25）式可得出平均损失率的表达式为：

$$C(\tau)=\int_0^{\tau}c_3(t)f(\tau-t)dt+c_4+(c_5-c\ )F(\tau)\Big/\int_0^{\tau}F(x)dx. \tag{11.35}$$

求函数（11.35）的导数并令其等于零，便得到

$$\frac{c_4}{c_5-c_4}=F(\tau)+\lambda(\tau)\int_0^\tau \overline{F}(x)\mathrm{d}x$$

$$+\frac{\int_0^\tau f(\tau-x)\mathrm{d}c_3(x)\int_0^\tau \overline{F}(x)\mathrm{d}x-F(\tau)\int_0^\tau F(\tau-x)\mathrm{d}c_3(x)}{(c_5-c_4)\overline{F}(\tau)}. \tag{11.36}$$

因为$\lim\limits_{\tau\to 0}C(\tau)=\lim\limits_{\tau\to\infty}C(\tau)=\infty$，而方程（11.36）具有有限根，于是在所研究的情形下，系统经过有限的使用时间后，必须实施计划的预防性定期维修。

当$\Phi(x)=0$时，由等式（11.22）可得出，在无故障自动显示的情形下，平均利润率表达式为：

$$S(\tau)=\frac{\int_0^\tau F(x)\mathrm{d}c_0(x)-\int_0^\tau F(\tau-x)\mathrm{d}c_3(x)-c_4-(c_5-c_4)F(\tau)}{\tau+M\gamma_1+(M\gamma_2-M\gamma_1)F(\tau)}. \tag{11.37}$$

为了验证（11.37）式在端点具有最大值，就要检验条件（11.24）的充分性。因为在所研究的情形下，$c_3(x)$是单调增函数，所以只要满足条件

$$\lim_{\tau\to\infty}\int_0^\tau f(\tau-x)\mathrm{d}c_3(x)>0$$

即可。

第十二章　在可靠性信息有限和有监控错误时的技术维修模型

§12·1　概　　述

正如第十章所指出的，系统的可靠性特征量是根据统计数据确定的。所以它不是绝对确定的。本章所要研究的技术维修模型是：在给定系统无故障工作时间均值和无故障工作时间分布函数某些值的条件下，确定技术维修模型。

实际上，我们特别感兴趣的问题是对系统的状态存在统计错误时的计算问题。因为要根据系统的状态来决定采取何种维修，所以对状态显示的不可靠性会增加额外的维修时间。本章最后一节，研究维修中存在两种错误的维修模型：监控系统将系统的正常状态显示为故障状态；将故障状态显示为正常状态。

§12·2　技术维修策略的描述和功能质量特征量

系统在开始工作的时刻（$t=0$），就规定了工作到时间η时实施计划的预防性维修，η的分布函数为$G(x)=P(\eta<x)$。如果到规定的时刻η前系统未发生故障（$\xi>\eta$，这里ξ是系统无故障工作时间，其分布函数为$F(x)=P(\xi<x)$），则在规定的时刻η开始计划的预防性维修，维修时间为$\gamma_{\text{п}}$，且其均值为$T_{\text{пп}}=M\gamma_{\text{п}}$。如果到规定的时刻$\eta$系统已发生故障（$\xi<\eta$），由于故障是瞬时显示的（此性质是假设的），因此在时刻ξ就知道系统发生故障，这个应立即开始计划外的应急维修，维修时间为$\gamma_{\text{а}}$，其均值为$T_{\text{ав}}=M\gamma_{\text{а}}$。在完成上述维修工作后，使系统完全更新（这是维修性质决定的）。因此，维修工作结束的时刻就是下次计划的预防性维修周期开始的时刻，以后重复全部技术维修过程。假定在进行维修的时间里，系统不能执行自己的功能，即系统无工作能力。

关于技术维修策略的论述可参阅文献[7,10]，也可参阅§11·5。因此，我们直接引用无限长的维护使用时间的功能质量特征量表达式，而不予证明。

完成任务概率$R(z)$的表达式：

$$R(z)=\frac{\int_0^\infty\left\{\int_0^x\bar F(u-z)\,\mathrm{d}u\right\}\mathrm{d}G(x)}{\int_0^\infty\left\{\int_0^x\bar F(u)\,\mathrm{d}u+T_{\text{пп}}+(T_{\text{ав}}-T_{\text{пп}})F(x)\right\}\mathrm{d}G(x)}.\qquad(12.1)$$

根据（12.1）式可很容易地得到可用度的表达式

$$K_r=R(0)=\frac{\int_0^\infty\left\{\int_0^x\bar F(u)\,\mathrm{d}u\right\}\mathrm{d}G(x)}{\int_0^\infty\left\{\int_0^x\bar F(u)\,\mathrm{d}u+T_{\text{пп}}+(T_{\text{ав}}-T_{\text{пп}})F(x)\right\}\mathrm{d}G(x)}.$$

假定在单位时间内，功能质量特征上所得到的利润(效益)率为c_0，而在实施计划的预防性维修及计划外的应急维修的时间里的损失率为$c_{пп}$和$\bar{c}_{ав}$，亦即$c_i(t)=c_i t$。于是，系统在长期维护使用中，在日历时间寿命内的平均利润率的表达式为

$$S=\frac{\int_0^{\infty}\left\{c_0\int_0^{x}\overline{F}(u)\mathrm{d}u-[c_{пп}T_{пп}+(\bar{c}_{ав}\overline{T}_{ав}-c_{пп}T_{пп})F(x)]\right\}\mathrm{d}G(x)}{\int_0^{\infty}\left\{\int_0^{x}\overline{F}(u)\mathrm{d}u+T_{пп}+(\overline{T}_{ав}-T_{пп})F(x)\right\}\mathrm{d}G(x)},$$

而在长期维护使用中，系统功能不正常的平均损失率表达式为

$$C=\frac{\int_0^{\infty}[c_{пп}T_{пп}+(\bar{c}_{ав}\overline{T}_{ав}-c_{пп}T_{пп})F(x)]\mathrm{d}G(x)}{\int_0^{\infty}\int_0^{x}\overline{F}(u)\mathrm{d}u\mathrm{d}G(x)}.$$

§12·3 已知均值和方差时的最小最大化维修策略

下面，研究§12·2所叙述的系统的技术维修策略。假设系统无故障工作时间的分布函数为$F(y)$属于具有已知均值$M=\int_0^{\infty}x\mathrm{d}F(x)$的分布函数集$\Omega(M)$；或者属于具有已知均值$M=\int_0^{\infty}x\mathrm{d}F(x)$和方差$D=\int_0^{\infty}x^2\mathrm{d}F(x)$的分布函数集$\Omega(M,D)$。

为了使演算简单，假定计划的预防性维修时间τ是给定的，即已知τ的分布函数$G(x)$属于退化分布函数集

$$G(x)\in Ш_1^* \quad 或 \quad G(x)=\begin{cases}0, & x<\tau,\\ 1, & x\geq\tau.\end{cases}$$

在这种情况下问题可归结为求

$$\max_{0\leq\tau\leq\infty}\ \min_{F\in\Omega(M)} I(\tau,F), \quad 或者 \quad \max_{0\leq\tau\leq\infty}\ \min_{F\in\Omega(M,D)} I(\tau,F).$$

式中$I(\tau,F)$——在时刻τ开始计划的预防性维修，而无故障工作时间的分布函数为$F(y)$的功能质量特征量。

下面再来研究可用度

$$K_{\Gamma}(\tau,F)=I(\tau,F)=\frac{\int_0^{\tau}\overline{F}(u)\mathrm{d}u}{\int_0^{\tau}\overline{F}(x)\mathrm{d}x+T_{пп}+(\overline{T}_{ав}-T_{пп})F(\tau)}. \tag{12.2}$$

为此，必须求出τ_0和$F^*(x)$。在这些信息下，获得等式

$$K_{\Gamma}(\tau_0,F^*)=\max_{\tau}\ \min_{F\in\Omega(M)}\frac{\int_0^{\tau}\overline{F}(x)\mathrm{d}x}{\int_0^{\tau}\overline{F}(x)\mathrm{d}x+T_{пп}+(\overline{T}_{ав}-T_{пп})F(\tau)}.$$

式中$\tau_0=\infty$，$F^*(x)=1-e^{-x/M}$。实际上，对任何函数$F\in\Omega(M)$都存在

$$M(M+\overline{T}_{ав})^{-1}=K_{\Gamma}(\infty,F^*)=\min_{F\in\Omega(M)}K_{\Gamma}(\infty,F). \tag{12.3}$$

因为当$\tau=\infty$时，$K_{\Gamma}(\infty,F)$与F的具体形式无关，并在集$\Omega(M)$中取常数值。考虑到极值

（极小值和极大值），我们可写成

$$\min_{\Phi\in\Omega(M)} K_r(\infty,\Phi)\le\max_{\tau}\min_{\Phi\in\Omega(M)} K_r(\tau,\Phi)\le\min_{\Phi\in\Omega(M)}\max_{\tau} K_r(\tau,\Phi). \tag{12.4}$$

对后一不等式的证明如下：对于任何τ和$F\in\Omega(M)$来说，不等式$K_r(\tau,F)\le\max_x K_r(x,F)$是正确的。因此，对任意给定的$\tau$

$$\min_{F\in\Omega(M)} K_r(\tau,F)\le\min_{F\in\Omega(M)}\max_x K_r(x,F).$$

既然后一不等式对任意τ都正确，那么

$$\max_{\tau}\min_{F\in\Omega(M)} K_r(\tau,F)\le\min_{F\in\Omega(M)}\max_x K_r(x,F).$$

进一步演变不等式便得到

$$\min_{\Phi\in\Omega(M)}\max_{\tau} K_r(\tau,\Phi)\le\max_{\tau} K_r(\tau,F^*)=M(M+T_{an})^{-1}. \tag{12.5}$$

将指数分布函数$F^*(t)=1-e^{-t/M}$直接代入（12.2）式，便可验证（12.5）式是正确的，并且它就是（12.5）式的极大值。

$$K_r(\tau,F^*)=M[M+T_{an}+T_{nn}/(e^{\tau/M}-1)]^{-1}.$$

$$\max_{\tau} K_r(\tau,F^*)=K_r(\infty,F^*)=M(M+T_{an})^{-1}.$$

将不等式（12.3）～（12.5）合并，便得到

$$\max_{\tau}\min_{F\in\Omega(M)} K_r(\tau,F)=K_r(\infty,F^*)=M(M+T_{an})^{-1}.$$

可见，在只知道无故障工作时间均值M的条件下，根据最小最大化规则知，不应该实施计划的预防性维修策略（$\tau=\infty$），可用度K_r的保障值等于$M(M+T_{an})^{-1}$。

而平均损失率[1.1]为

$$I(\tau,F)=C(\tau,F)=\frac{c_{nn}T_{nn}+(c_{an}T_{an}-c_{nn}T_{nn})F(\tau)}{\int_0^\tau \bar F(x)\mathrm{d}x},$$

进行类似的推论，便得到

$$\frac{c_{an}T_{an}}{M}=\max_{F\in\Omega(M)} C(\infty,F)\ge\min_{\tau}\max_{F\in\Omega(M)} C(\tau,F)$$

$$\ge\max_{F\in\Omega(M)}\min_{\tau} C(\tau,F)\ge\min_{\tau} C(\tau,F^*)=C(\infty,F^*)=\frac{c_{an}T_{an}}{M}.$$

如果用平均损失率表示功能质量特征量，可证明最小最大化策略与消极策略是一致的，即不宜进行预防性维修，只有发生故障才维修。

对于平均利润率来说，下述推论是正确的，如果$M\ge(c_{an}-c_{nn})T_{an}/(c_0+c_{nn})$，那么根据$0<\tau<\infty$和$F\in\Omega(M)$，用平均利润率的某一保障值确定预防性维修策略是最小最大化策略。根据这一策略不宜实施预防性维修，而且如果$M>(c_{an}/c_0)T_{an}$，那么平均利润率的保障值是正值。

当已决定实施预防性维修的条件下，

$$I(\tau,F)=S(\tau,F)=\frac{c_0\int_0^\tau\bar F(x)\mathrm{d}x-c_{nn}T_{nn}-(c_{an}T_{an}-c_{nn}T_{nn})F(\tau)}{\int_0^\tau\bar F(x)\mathrm{d}x+T_{nn}+(T_{an}-T_{nn})F(\tau)}.$$

假设在 $t\to 0$ 时，$\bar{F}^*(t)=e^{-t/M}$，则

$$S'_{\tau}(\tau,F^*)\geqslant 0,\quad 当\ M\geqslant (c_{\text{应}}-c_{\text{预}})T_{\text{应}}/(c_0+c_{\text{预}}).$$

然后，再考虑到（12.1）和（12.5）式，有

$$\frac{c_0M-c_{\text{应}}\bar{T}_{\text{应}}}{M+T_{\text{应}}}=\min_{F\in\Omega\ M} S(\infty,F)\leqslant\max_{\tau}\min_{F\in\Omega(M)} S(\tau,F)$$

$$=\min_{F\in\Omega\ M}\max_{\tau}S(\tau,F)\leqslant\max_{\tau}S(\tau,F^*)=S(\infty,F^*)=\frac{c_0M-c_{\text{应}}\bar{T}_{\text{应}}}{M+T_{\text{应}}}.\qquad(12.6)$$

于是，推论的第一部分证毕。第二部分是由（12.6）式得出的。

如果无故障工作时间的分布函数$F(x)$属于具有均值和方差已知的分布函数集，那么问题就变得极其复杂。这里只介绍所得到的策略的两个结果，而不予证明。

定理[10] 如果已知无故障工作时间的均值M和方差D，而且

$$\sigma/M=\sqrt{D-M^2}/M>1-c_{\text{预}}T_{\text{预}}/\bar{c}_{\text{应}}\bar{T}_{\text{应}},\quad \sigma^2=D-M^2,$$

而分布函数$F(x)$的具体形式是未知的，那么根据最小最大化规则的维修策略，给出平均损失率的保障值，在长期维护使用的条件下，只应实施应急的维修，而不应实施计划的预防性维修。

如果已知分布函数$F(x)$属于故障率增长的（$r(x)$是不减函数）的分布函数集，那么当满足$\sigma/M<1-c_{\text{预}}T_{\text{预}}/c_{\text{应}}T_{\text{应}}$时，预防性维修最优周期是有限的。

在定理[48]中也研究了平均损失率的最小最大化维修策略。

定理[48] 如果已知系统的无故障工作时间的均值M和方差D，而且

$$2\sigma/M>1-c_{\text{预}}T_{\text{预}}/\bar{c}_{\text{应}}\bar{T}_{\text{应}},\quad \sigma=\sqrt{D-M^2},$$

但不知道分布函数的具体形式，那么根据最小最大化规则知，只应实施计划外的应急维修，而不宜实施计划的预防性维修。如果

$$0<2\sigma/M<1-c_{\text{预}}T_{\text{预}}/c_{\text{应}}T_{\text{应}},$$

那么实施计划的预防性维修的最小最大化周期是有限值，并属于区间

$$\left(\frac{M(1+b)}{2}-\sqrt{\left[\frac{M(1+b)}{2}\right]^2-\sigma^2},\ \frac{M(1+b)}{2}+\sqrt{\left[\frac{M(1+b)}{2}\right]^2-\sigma^2}\right).$$

其中 $b=c_{\text{预}}T_{\text{预}}/\bar{c}_{\text{应}}T_{\text{应}}$。

应用$A(\tau)=\max\limits_{F\in\Omega(M,D)}C(\tau,F)$，能确定实施计划的预防性维修的最小最大化周期。令

$$b=1-\frac{\sigma^2+\sigma(\sigma^2+4M_1^2)^{1/2}}{2M^2},$$

$T_1=(\sigma^2+bM^2)(2M)^{-1}$，$T_2=[M-(M^2b^2+b(\sigma^2-2M^2)+M^2-2\sigma^2)^{1/2}](2-b)^{-1}$；

$T_3=[M+(M^2b^2+b(\sigma^2-2M^2)+M^2-2\sigma^2)^{1/2}](2-b)^{-1}$。

那么，如果满足条件

$$D/M^2<3/2\quad 和\quad 0<b<1,\qquad(12.7)$$

则

$$\frac{A(\tau)}{c_{ав}\overline{T}_{пп}}=\begin{cases}\dfrac{\sigma^2+bM^2}{\tau M^2}, & 0\leqslant\tau<T_1,\\[2mm] \dfrac{2b}{\tau+bM-[(\tau-bM)^2+b\sigma^2]^{1/2}}, & T_1\leqslant\tau<T_2 \text{且} T_3\leqslant\tau<\infty;\\[2mm] \dfrac{\sigma^2+b(M-\tau)^2}{\tau[\sigma^2+(M-\tau)^2]}, & T_2\leqslant\tau<T_3.\end{cases}\tag{12.8}$$

如果不满足条件（12.7），那么

$$\frac{A(\tau)}{c_{ав}\overline{T}_{пп}}=\begin{cases}\dfrac{\sigma^2+bM^2}{\tau M^2}, & 0<\tau<T_1;\\[2mm] \dfrac{2b}{\tau+bM-[(\tau-bM)^2+b\sigma^2]^{1/2}}, & \tau\geqslant T_1.\end{cases}\tag{12.9}$$

根据给定集$\Omega(M,D)$可导出极值的分布函数$F(x)$表达式。

在已知均值M和方差D的条件下，研究函数（12.8）和（12.9）的极值并确定极值点τ_0，便可求出实施计划的预防性维修的最小最大化周期。

§12·4 已知分布函数在某些点上之值时求最小最大化策略

在§10·1中所指出的情形具有典型性：在已知系统无故障工作时间ξ的分布函数在某些点$\mathbf{y}=(y_0,y_1,\cdots,y_i,y_n,\cdots\infty)$上的取值，即$F\in\Omega(\pi,\mathbf{y},\pi)$。本节将研究部件故障瞬时显示的维修策略。根据最小最大化规则给出功能质量特征量保障值，为此算出所研究情形的分布函数$F^*\in\Omega(\pi,\mathbf{y},\pi)$和$G^*\in\Omega$必须满足$R(z,F^*,G^*)=\max\limits_{G\in\Omega}\min\limits_{F\in\Omega(\pi,\mathbf{y},\pi)}R(z)$。式中泛函$R(z)$根据（12.10）式求出。泛函$R(z)$是$F$和$G$的分式线性泛函，

$$R(z)=P(z,F,G)=\frac{\int_0^\infty\int_0^\infty A_z(x,y)\mathrm{d}F(y)\mathrm{d}G(x)}{\int_0^\infty\int_0^\infty B(x,y)\mathrm{d}F(y)\mathrm{d}G(x)},$$

而被积函数的形式是

$$A_z(x,y)=\min[x,\max(0,y-z)]=\begin{cases}0, & y\leqslant z;\\ y-z, & z<y\leqslant x+z;\\ x, & y>x+z\end{cases}$$

$$B(x,y)=\begin{cases}y+T_{ав}, & y\leqslant x;\\ x+T_{пп}, & y>x.\end{cases}$$

因为$A_z(x,y)$是有限函数，在$T_{ав}\geqslant0$和$T_{пп}>0$的条件下，$B(x,y)>0$，所以解$\min\limits_{F\in\Omega(\pi,\mathbf{y},\pi)}R(z)$的问题可利用定理10.2。该定理证明，极值函数属于阶跃分布函数集$\Omega^*(\pi,\mathbf{y},\pi)$，函数在各半开区间$[y_i,y_{i+1})$上的阶跃值为$\Delta\pi_i=\pi_{i+1}-\pi_i$。在§10·3中列举的极值分布函数形式可参阅等式（10.17）。因此，对已确定的分布函数$G(x)$，存在

$$\min_{F\in\Omega(\pi,\mathbf{y},\pi)}R(z,F,G)=\min_{y_i\in(y_i,y_{i+1}),\ i=0,1,\cdots,n}\frac{\sum\limits_{i=0}^{n}\left[\int_0^\infty A_z(x,\tau_i)\mathrm{d}G(x)\right]\Delta\pi_i}{\sum\limits_{i=0}^{n}\left[\int_0^\infty B(x,\tau_i)\mathrm{d}G(x)\right]\Delta\pi_i}.$$

在一般情况下，必须根据$G(x)$的极值点$(\tau_1^*,\cdots,\tau_n^*)$确定$R(z,F,G)$对$G(x)$的极小值，而根据$G(x)$的极值点求$R(z,F,G)$的极大值是很困难的。对于所研究的情形，可以利用辅助定理10.1证明$\tau_i^*=y_i+0(i=0,1,\cdots,n)$，因此，将所研究的泛函变为

$$\frac{\sum_{i=0}^{n}\left[\int_0^\infty A_z(x,\tau_i)dG(x)\right]\Delta\pi_i}{\sum_{i=0}^{n}\left[\int_0^\infty B(x,\tau_i)dG(x)\right]\Delta\pi_i}=\frac{\dfrac{\sum_{i=0}^{n}\int_0^\infty A_z(x,\tau_i)dG(x)\Delta\pi_i}{\sum_{i=0}^{n}\int_0^\infty A_0(x,\tau_i)dG(x)\Delta\pi_i}}{1+\dfrac{\sum_{i=0}^{n}\int_0^\infty D(x,\tau_i)dG(x)\Delta\pi_i}{\sum_{i=0}^{n}\int_0^\infty A_0(x,\tau_i)dG(x)\Delta\pi_i}}. \tag{12.10}$$

式中 $A_0(x,y)=\min(x,y)$；$D(x,y)=B(x,y)-A_0(x,y)=\begin{cases}\overline{T}_{\text{nn}}, & y<x;\\ T_{\text{nn}}, & y\geqslant x.\end{cases}$

当给定任意$x\in[0,\infty)$时，$D(x,y)$是y的非递增函数$(\overline{T}_{\text{nn}}>T_{\text{nn}})$，而函数$A_0(x,y)$是$y$的非递减函数。因此，对任意分布函数$G(x)$，$a(y)=\int_0^\infty D(x,y)dG(x)$——$y$的非递增函数，$b(y)=\int_0^\infty A_0(x,y)dG(x)$——$y$的非递减函数，并且根据定理10.1可求出(12.10)式的分母在$\tau_i^*=y_i+0(i=0,1,\cdots,n)$点取极大值。使(12.10)式的分子直接对$\tau_i$微分，可知分子在$\tau^*=y_i+0$点取极小值。实际上，当$\Delta\pi\neq0$时，(12.10)式的分子变为（显然，当$\Delta\pi_i=0$时，分子与$\pi_i$无关）

$$\left[\int_0^\infty A_z(x,\tau_i)dG(x)+c_1\right]\Big/\left[\int_0^\infty A_0(x,\tau_i)dG(x)+c_2\right].$$

式中 $c_1=\dfrac{1}{\Delta\pi_i}\sum_{s\neq i}\Delta\pi_s\int_0^\infty A_z(x,\tau_s)dG(x)$，$c_2=\dfrac{1}{\Delta\pi_i}\sum_{s\neq i}\Delta\pi_s\int_0^\infty A_0(x,\tau_s)dG(x)$。

由于$A_0(x,y)\geqslant A(x,y)$，所以$c_2\geqslant c_1$是正确的。显然，当$\tau_i\leqslant z$时，(12.10)式的分子与τ无关。当$\tau_i>z$时，存在

$$\frac{\int_0^\infty A_z(x,\tau_i)dG(x)+c_1}{\int_0^\infty A_0(x,\tau_i)dG(x)+c_2}=\frac{\int_0^{\tau_i-z}xdG(x)+\int_{\tau_i-z}^\infty(\tau_i-z)dG(x)+c_1}{\int_0^{\tau_i}xdG(x)+\int_{\tau_i}^\infty\tau_i dG(x)+c_2}. \tag{12.11}$$

(12.11)（原文为2.1——译注）式的导数的符号决定于其分子的导数的符号。因为$c_2\geqslant c_1$，$z\geqslant0$，所以导数的分子是非负的。

可见，(12.10)式的分子也在$\tau_i^*=y_i+0$ $(i=0,1,\cdots,n)$取极小值，最后，得到

$$R(z,F^*,G)=\min_{F\in\Omega(\tau)}R(z,F,G)=\frac{\int_0^\infty\left[\sum_{i=0}^{n}A_z(x,y_i+0)\Delta\pi_i\right]dG(x)}{\int_0^\infty\left[\sum_{i=0}^{n}B(x,y_i+0)\Delta\pi_i\right]dG(x)}. \tag{12.12}$$

上式说明，极值函数$F^*(y)$与$G(x)$无关。

现在再来研究(12.12)式对G的极大值。此泛函是G的分式线性泛函。因此，根据定理10.3可知泛函的极大值存在于分式线性泛函集$G\in\Omega^*$。于是

$$\max_{G\in\Omega}R(z,F^*,G)=\max_{\tau\geq 0}\frac{\sum_{i=0}^{n}A_z(\tau,y_i+0)\Delta\pi_i}{\sum_{i=0}^{n}B(\tau,y_i+0)\Delta\pi_i}. \qquad (12.13)$$

根据函数$A_z(\tau,y_i)$和$B(\tau,y_i)$的定义可知，(12.13)式的分子和分母都是分段线性函数。

$$\sum_{i=0}^{n}A_z(\tau,y_i)\Delta\pi_i=\begin{cases}\tau\sum_{k\geq k_0+1}\Delta\pi_k, & \tau\in[0,y_{k_0+1}-z);\\ \sum_{k=k_0+1}^{m}(y_k-z)\Delta\pi_k+\tau\sum_{k\geq m+1}\Delta\pi_k, & \tau\in[y_m-z,y_{m+1}-z).\end{cases}$$

式中$k_0(0\leqslant k_0\leqslant n)$是序号，$k_0$满足$y_{k_0}-z\leqslant 0$，$y_{k_0+1}-z>0$；

$$\sum_{i=0}^{n}B(\tau,y_i+0)\Delta\pi_i=\sum_{i=0}^{k}(y_i+T_{pm})\Delta\pi_i+(\tau+T_{pm})\sum_{i=k+1}^{n}\Delta\pi_i,$$

$$\tau\in[y_k,y_{k+1}),\ k=0,1,2,\cdots,n.$$

应指出，在各点$y_i(i=0,1,2,\cdots,n)$和$y_k-z(k=k_0+1,k_0+2,\cdots,n)$上分子分母的导数存在间断点。显然，在这些点中有一点能使分式线性函数取极大值。须知，在点$\tau=y_k-z$上分子分母是连续的，而在点$\tau=y_i$上分母是间断的。因此，应根据$\tau=y_i\pm0$的各点求极大值。最后，得到

$$\max_{z\in\Omega_F}\min_{G\in\Omega(n,\mathbf{y},\boldsymbol{\pi})}R(z,F,G)=\max_{\substack{\tau=y_i\pm0,\ i=0,\cdots,n\\ \tau=y_k-z,\ k=k_0+1,\cdots,n}}\frac{\sum_{i=0}^{n}A_z(\tau,y_i)\Delta\pi_i}{\sum_{i=0}^{n}B(\tau,y_i+0)\Delta\pi_i}. \qquad (12.14)$$

在点τ上所取的极大值就是所求的最小最大化（最优）预防性维修周期。

§12·12中所列举的其它功能质量特征量的研究与此类似。

§12·5 对串联系统的最小最大化维修策略

假设技术系统是由N个部件串联的。每个部件的无故障工作时间服从任意分布函数$F_i(x)=P(\xi_i<x)(i=1,2,\cdots,N)$。在[7]中研究了当可靠性信息充足的条件下的技术维修策略。但是，实际上无故障工作时间分布函数不可能确切地知道，而只知道某些点上的取值（如已知函数的百分位点），即$F_i(x)\in\Omega(n_i,\mathbf{y}_i,\boldsymbol{\pi}_i)=\Omega_i$。式中$\Omega_i$——第$i$个部件的分布函数集，函数$F_i$在点$\mathbf{y}_i=(y_{i0}=0,y_{i1},\cdots,y_{in_i},y_{i,n_i+1}=\infty)$上的取值为$\boldsymbol{\pi}_i=(\pi_{i0}=0,\pi_{i1},\cdots,\pi_{in_i},\pi_{i,n_i+1}=1)$。

在这种情况下，利用最小最大化规则从给定集合Ω_i中求最坏的分布函数$F_i(x)$的预防性维修的最优周期。

为了分析N个部件的串联系统的维修策略，我们利用这一规则确定功能质量特征量的保障值。

下面，简述维修策略。假设系统在规定的时刻τ开始预防性维修，η是服从分布函数$G(x)$的随机变量，用T_{pm}表示预防性维修使系统更新所需的维修时间的均值。如果在规定

的预防性维修时刻前发现系统中第 n 个部件发生故障（$n=1,2,\cdots,N$），那么在发现故障的时刻开始计划外应急维修（即将故障部件更换为新部件），此维修时间的均值为T_n。假设某一部件发生故障就及时更换为新的，一直到工作时间到 n 为止。这次实施的预防性维修的开始时刻与已实施过的计划外的应急维修次数无关，也与最后一次计划外的应急维修结束时刻之后又经过的时间长短无关。当预防性维修结束的时刻就是系统更新的时刻，则以后的全部维修过程又重复出现。

在所研究的模型中，假定有一个维修组在进行维修，从而保证一旦在某一时刻发现一些部件发生故障，就可以按照发生故障的先后次序进行维修。

在[7]中给出了上述维修策略的功能质量特征量表达式，它决定于维修过程的更新函数，而更新过程是由 n 个部件无故障工作时间的随机序列（$\zeta_{n1},\zeta_{n2},\cdots,\zeta_{nm}$）及其分布函数 $F_n(x)$ 构成的。

可用度为

$$K_r=K_r(G;H_{F_1},\cdots,H_{F_N})=\frac{\int_0^\infty t\mathrm{d}G(t)}{\int_0^\infty\left[t+\overline{T}_{\text{预}}+\sum_{k=1}^{N}\overline{T}_kH_{F_k}(t)\right]\mathrm{d}G(t)}. \tag{12.15}$$

式中$H_{F_n}(t)$——更新过程的更新函数，它决定于第 n 个部件的无故障工作时间序列ξ_{nm}（$n=1,2,\cdots$）。

系统无故障工作时间的**平均损失率**为

$$C=C(G;H_{F_1},\cdots,H_{F_N})=\frac{\int_0^\infty\left[c_{\text{预}}T_{\text{预}}+\sum_{k=1}^{N}c_kT_kH_{F_k}(t)\right]\mathrm{d}G(t)}{\int_0^\infty t\mathrm{d}G(t)}. \tag{12.16}$$

式中$c_{\text{预}}$——在实施预防性维修的时间内的平均损失率；$\overline{c}_k$——对第 k 个部件实施应急维修时间内的平均损失率。

最后，可根据与上个特征量有关的公式

$$S(G;H_{F_1},\cdots,H_{F_N})=K_r(c_0-C). \tag{12.17}$$

计算平均利润率。式中c_0——系统功能正常时间内的平均利润率。

不难看出，泛函（12.15）～（12.17）都是函数$G(x)$的分式线性泛函，而对于分布函数$F_k(x)$的关系就很复杂。这是由于更新函数$H_{F_k}(t)$决定于分布函数$F_k(t)$，$k=1,2,\cdots,N$

上述问题也可用下述方法来描述。求满足下述泛函的分布函数$G^*(t)$。

$$I=\min_{\substack{F_k\in\Omega_k\\ k=1,\cdots,N}} I(G^*,H_{F_1},\cdots,H_{F_N})=\max_{G\in\Omega}\min_{\substack{F_k\in\Omega_k\\ k=1,\cdots,N}} I(G,H_{F_1},\cdots,H_{F_N}). \tag{12.18}$$

式中Ω——正随机变量分布函数集，而I——系统功能质量特征量。须知，当根据集Ω求平均损失率时，应取最小值；而根据子集Ω_k求平均损失率时，应取最大值。

下面给出辅助定理及其证明，由此可回答所提出的问题。

辅助定理12.1　令正随机变量ξ_1和ξ_2的分布函数分别为$G_1(x)$和$G_2(x)$，对任一$x\geqslant0$满足不等式

$$G_1(x)\geqslant G_2(x),$$

那么，由独立随机变量及其分布$G_1(x)$和$G_2(x)$的序列形成的更新函数$H_1(x)$和$H_2(x)$满足不等式

$$H_1(x)\geqslant H_2(x)。$$

证明：已知$H_k(t)=\sum_{i=1}^{\infty}G_k^{(i)}(t)\quad(k=1,2)$，式中$G_k^{(i)}(t)$——分布函数$G_k(t)$的$i$重卷积。因此，只要证明不等式

$$G_2^{(i)}(x)\leqslant G_1^{(i)}(x)，当i\geqslant 1，x\geqslant 0时$$

成立，就可证明了辅助定理成立。

下述讨论可证明此不等式成立。令$A_i(x)$，$B_i(x)(i=1,2)$为某些分布函数。于是，在$A_i(x)\geqslant B_i(x)$，$x\geqslant 0$，$A_i(0)=B_i(0)$的条件下，

$$\int_0^{\infty}A_1(t-x)\mathrm{d}A_2(x)-\int_0^{\infty}B_1(t-x)\mathrm{d}B_2(x)=\int_0^{\infty}[A_1(t-x)-B_1(t-x)]\mathrm{d}A_2(x)$$

$$+\int_0^{\infty}[A_2(t-x)-B_2(t-x)]\mathrm{d}B_1(x)\geqslant 0。$$

辅助定理证毕。

由（12.18）式的解可以看出，泛函（12.15）是更新函数$H_{F_k}(t)$的单调关联泛函。从另一方面看，在集合$\Omega_i(i=1,2,\cdots,N)$中存在优函数

$$F_i^*(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0;\\ \pi_{ik}, & y_{i,k-1}<x\leqslant y_{ik},\quad k=1,\cdots,n_i;\\ 1, & x>y_{n_i}。\end{cases}\tag{12.19}$$

对于该函数，在任何$F_i(x)\in\Omega_i$时，都存在$F_i^*(x)\geqslant F_i(x)$。因此，根据辅助定理可得到不等式

$$H_{F_i}(x)\leqslant H_{F_i^*}(x)，\quad x\geqslant 0。$$

可见

$$\min_{\substack{F_i\in\Omega_i\\ i=1,\cdots,N}}K_r(G,H_{F_1},\cdots,H_{F_N})=K_r(G,H_{F_1^*},\cdots,H_{F_N^*})。\tag{12.20}$$

而极值函数F_i^*与G^*无关。反之，亦然。

（12.20）是G的分式线性泛函，因此其极值存在于退化分布函数G^*中，亦即求泛函的极值问题简化为求函数对τ的极大值问题。求出

$$K_r(G^*;H_{F_1^*},\cdots,H_{F_N^*})=\max_{\tau\geqslant 0}\frac{\tau}{\tau+T_{nn}+\sum_{i=1}^{N}T_iH_{F_i^*}(\tau)}\tag{12.21}$$

的极大值点τ_0，就可求出预防性维修的最优周期。可用度K_r的保障值为

$$K_r(G^*;H_{F_1^*},\cdots,H_{F_N^*})=\frac{\tau_0}{\tau_0+T_{nn}+\sum_{i=1}^{N}T_iH_{F_i^*}(\tau_0)}。$$

平均损失率和平均利润率可用上述类似的方法求出：

$$C(G^*,H_{F_1^*},\cdots,H_{F_N^*})=\min_{\tau}\frac{\bar{c}_{nn}\bar{T}_{nn}+\sum_{i=1}^{N}\bar{c}_i\bar{T}_iH_{F_i^*}(\tau)}{\tau},\tag{12.22}$$

$$S(G^*;H_{F*_1},\cdots,H_{F*_N})=\max_{\tau\geq 0}\frac{c_0\tau-\bar{c}_{nn}\bar{T}_{nn}-\sum_1^N \bar{c}_i\bar{T}_iH_{F*_i}(\tau)}{\tau+\bar{T}_{nn}+\sum_1^N \bar{T}_iH_{F*_i}(\tau)}. \qquad (12.23)$$

于是，可把解此类问题的步骤归结为：

1．用（12.19）式计算分布函数$F_i^*(x)$，用下式积分求出更新函数$H_{F*_i}(x)$：

$$H_{F*_i}(x)=F_i^*(x)+\int_0^x F_i^*(x-y)dH_{F*_i}(y). \qquad (12.24)$$

2．计算（12.21）～（12.23）各式的极值点，依各极值点决定预防性维修的最优周期。

现在来研究$\eta_i=1(i=1,2,\cdots,N)$的特殊情形。假设$\Delta>0, y_{i1}=l_i\Delta(i=1,2,\cdots,N)$，$l_i$是正整数。于是，对（12.24）式存在

$$H_{F*_i}(x)=\frac{]k/l_i[+1}{1-\pi_{i1}}-1,\quad k\Delta<x\leq(k+1)\Delta.$$

式中$]k/l_i[$（原文为$[k/l_i]$——译注）——$k/l_i(k=0,1,2,\cdots)$的整数部分。

$k_0\Delta$（k_0是整数）——求出的预防性维修最优维修周期。根据$k=1,2,\cdots$来确定下列表达式的极值点，依此确定$k_0\Delta$。

对于可用度表达式取极小值点

$$\frac{\bar{T}_{nn}-\sum_1^N\bar{T}_i}{k}+\frac{1}{k}\sum_1^N\bar{T}_i\frac{]k/l_i[+1}{1-\pi_{i1}}.$$

对于平均损失率表达式取极大值点

$$\frac{\bar{T}_{nn}\bar{c}_{nn}-\sum_1^N\bar{c}_i\bar{T}_i}{k}+\frac{1}{k}\sum_1^N\bar{c}_i\bar{T}_i\frac{]k/l_i[+1}{1-\pi_{i1}}.$$

对于平均利润率表达式取极大值

$$\frac{c_0\Delta k-\left(\bar{c}_{nn}\bar{T}_{nn}-\sum_1^N\bar{c}_i\bar{T}_i\right)-\sum_1^N\bar{c}_i\bar{T}_i\frac{]k/l_i[+1}{1-\pi_{i1}}}{\Delta k+\bar{T}_{nn}-\sum_1^N\bar{T}_i+\sum_1^N\bar{T}_i\frac{]k/l_i[+1}{1-\pi_{i1}}}.$$

§12·6 对系统的监控存在错误时的维修策略

假设系统在时刻$x_0=0$处于正常状态，其无故障工作时间ξ的分布函数是F，已知此函数属于正随机变量分布集，即$F\in\Omega(0,y,\pi)$，系统无故障自动显示，即$\Phi(x)=0$。在$T>0$的时间内使用系统。为了确定系统在周期$(0,T)$内的状态，首先要规定一检查程序，此程序由检查工作能力顺序时刻$X_n=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$组成。其次，规定$x_0=0$，$x_{n+1}=T$。我们记$X_n=\{x_k,k=0,1,\cdots,n+1\}$。假定检查时间为零，用$c$表示每次检查的费用，检查次数等于$n$（在时刻$x_0=0$和$x_{n+1}$不作检查），如果系统在时刻$\xi$发生故障，而在某一时刻$t$被发现，则对于简单系统在故障状态中的损失等于$c_1(t-\xi)=c_1(t-\xi,t>\xi)$。这里假定在发现

系统发生故障的时刻 t 停止使用系统。最后，假设监控系统存在两类错误：把系统的故障状态依概率 $1-p(0<1-p<1)$ 误判为正常状态；把系统的正常状态依概率 $q(0<q<1)$ 误判为故障状态。不管系统的状态是否正常，只要检查出有故障就要停止工作。

为了说明问题，我们令 $A(X_n,\xi)$ 表示损失的数学期望，即均值。如果选择的检查程序为 X_n，而系统在时刻 ξ 发生故障，就产生损失。从以上描述可得出，当 $n>0$ 时，

$$A(X_n,\xi)=\begin{cases} q\sum\limits_{m=1}^{k}(1-q)^{m-1}(mc+s)+(1-q)^{k}\Big\{p\sum\limits_{m=k+1}^{n}(1-p)^{m-k-1}[mc+c_1(x_m-\xi)]+(1-p)^{n-k}\\ \quad\times[nc+c_1(T-\xi)]\Big\}, \qquad x_k<\xi\leqslant x_{k+1},k=0,\cdots,n-1; \\ \sum\limits_{k=1}^{n}(1-q)^{k-1}q(kc+s)+(1-q)^{n}[nc+c_1(T-\xi)], \\ \qquad x_n<\xi\leqslant T; \\ \sum\limits_{k=1}^{n}(1-q)^{k-1}q(kc+s)+(1-q)^{n}nc, \qquad \xi>T. \end{cases} \tag{12.25}$$

式中 s ——系统正常而认为有故障时的罚款。而且，再假设 $\sum\limits_{k=i}^{j}a_k=0\ (j<i)$，于是，从 (12.25) 式或从以上描述中可得出

$$A(X_0,\xi)=\begin{cases} c_1(T-\xi), & 0<\xi\leqslant T; \\ 0, & \xi>T. \end{cases}$$

还应指出，(12.25) 式的参数 p 和 q 的极限为 0 或 1。在周期 $(0,T)$ 内，损失的数学期望为

$$MA(X_n,\xi)=\int_0^T A(X_n,y)dF(y)+A(X_n,T)\bar{F}(T).$$

参照§12·4中所用的最小最大化规则，在选择最坏的分布 $F\in\Omega$ 时，从 $C^*(X^*)=\min\limits_{X_k}\max\limits_{F\in\Omega}MA(X_n,\xi)$ 时，可求出程序 X^*，在该程序中使损失的数学期望最小。

首先，选择最坏的分布 $F\in\Omega$ 的问题。不难指出，$MA(X_n,\xi)$ 是 F 的线性泛函。当满足自然约束 $c<\infty$，$c_1<\infty$，$s<\infty$，$T<\infty$ 时，被积函数 $A(X_n,y)$ 是一致有界的。因此，可根据退化分布函数集求出泛函的极小值（参阅定理10.3）。

于是，在程序 X_n 里，可得到

$$\max_{F\in\Omega}MA(X_n,\xi)=\max_{0\leqslant x\leqslant T}A(X_n,x). \tag{12.26}$$

根据 (12.25) 式得出结论：当 $x_k<x\leqslant x_{k+1}$ 时，函数 $A(X_n,x)$ 是线性递减的。所以

$$\max_{0\leqslant x\leqslant T}A(X_n,x)=\max_{0\leqslant k\leqslant n}A(X_n,x_k+0)=A(X_n,x_m+0).$$

式中 x_m——(12.26) 式的极大值点。

依条件

$$A(X_n,x_0+0)=A(X_n,x_1+0)=\cdots=A(X_n,x_{n-1}+0)=A(X_n,x_n+0) \tag{12.27}$$

继续确定 X_n。

令 $a_k=A(X_k,x_k+0)$，则在 $k=1,2,\cdots,n$ 的条件下，能直接从 (12.25) 式的计算中建

立等式

$$\frac{1-p}{1-q}a_k=a_{k-1}+\frac{c}{q(1-q)}(q-p)[1-(1-q)^k]-c_1(1-q)^{k-1}(x_k-x_{k-1})$$

$$+s\frac{q-p+p(1-q)^k}{1-q}. \tag{12.28}$$

如果 $p\neq q$，根据（12.27）式最后一等式求出程序X_n，可得到

$$a_k=\frac{c}{q}[1-(1-q)^k]-\frac{c_1}{q-p}(1-q)^k(x_k-x_{k-1})$$

$$s\left[1-\frac{p}{q-p}(1-q)^k\right]. \tag{12.29}$$

令$\Delta_k=x_{k+1}-x_k$，应用(12.27)和(12.29)式的关系可得到关于$\Delta_k(k=1,2,\cdots,n-1)$的方程组

$$\Delta_k=\frac{\Delta_{k-1}}{1-q}-\frac{spq}{c_1(1-q)}-\frac{cq}{c_1(1-q)}+\frac{cp}{c_1(1-q)};$$

$$\Delta_n=\frac{\Delta_{n-1}}{p-q}-\frac{sq}{c_1(p-q)}.$$

必须指出，后一方程是根据下述条件得到的，在区间$(x_n,x_{n+1}=T)$内，依定义区间长度$\Delta_n=T-x_n$，函数$A(X_n,x)$随系数$c_1(1-q)^n$从a_n到$q\sum_{k=1}^{n}(1-q)^{k-1}(kc+s)+nc(1-q)^n$呈直线性递减。如果考虑到条件$\sum_{k=0}^{n}\Delta_k=l$，则当$k=1,2\cdots$时，

$$\Delta_n=\frac{T-\frac{s}{c_1}[1-(1-q)]^n-\frac{1}{c_1 q^2}(spq+cp-cq)[nq-1+(1-q)^n]}{1+\frac{p-q}{q}[1-(1-q)^n]},$$

$$\Delta_{n-1}=\frac{sq}{c_1}+(1-q)\Delta_n,$$

$$\Delta_{k-1}=\frac{spq}{c}+\frac{c}{c_1}(p-q)+(1-q)\Delta_k. \tag{12.30}$$

可见，当$p\neq q$时，根据条件（12.27）式得出的程序决定于（12.30）式。

当$p=q$时，根据等式（12.28）和条件（12.27）可得到

$$\Delta_k=sq/c_1,k=0,\cdots,n-1;\quad \Delta_n=T-n(sq/c_1). \tag{12.31}$$

须知，Δ_n应为正值。在相反的情况下（当n较大时）不存在该范围的检查程序，并且对于Δ_k也可作出类似的结论。Δ_k由（12.30）式解出。

下面，证明由（12.27）式确定的程序集里找出最优程序X^*。即，用比例关系（12.30）和（12.31）式求出时刻x_k。首先，证明最优程序X^*的检查次数应小于某个数N。

令N为最大的非负数，且满足

$$\Delta_N\geq 0,\ \Delta_{N+1}<0. \tag{12.32}$$

根据（12.30）或（12.31）式求出Δ_k，那么最优检查程序X^*的检查次数不超过N。

为了证明这一论点，需应用条件（12.27）式所决定的程序X_N。当$n>N$时，

$$\max_{F\in\Omega} MA(X_N,\xi)<\max_{F\in\Omega} MA(Y_n,\xi).$$

式中Y_n——检查次数为n的任一检查程序。显然

$$\max_{F\in\Omega} MA(X_N,\xi)=a_{N-1}.$$

式中α_{N-1}决定于（12.29）式，也可由下式求之：

$$\alpha_{N-1}=A(X_N,T)+c_1(1-q)^N\Delta_N.$$

式中Δ_N是当$p\neq q$时由（12.30）式求出的。当$p=q$和$A(X_N,T)=s[1-(1-q)^N]+(c/q)\times[1-(1-q)^N]$时，由（12.31）式解出。

其次，

$$\max_{F\in\Omega} MA(Y_n,\xi)\geqslant A(Y_n,T)=\left(s+\frac{c}{q}\right)[1-(1-q)^n]$$

$$\geqslant\left(s+\frac{c}{q}\right)[1-(1-q)^{N+1}],n>N.$$

于是

$$\max_{F\in\Omega} MA(Y_n,\xi)-\max_{F\in\Omega} MA(X_N,\xi)\geqslant(1-q)^N[sq+c-c_1\Delta_N].$$

可见，如果$sq+c-c_1\Delta_N\geqslant0$，则论点便得到证明。当$p=q$时，显然可用（12.31）式得出此结论。当$p\neq q$时，则必须考虑关于$\Delta_N$的不等式（12.30）。用初等变换可以证明，但很繁琐。这里不予赘述。

如果没有满足条件（12.32）式的N，则最优程序的最大次数$N=\infty$。因此，最优检查程序可在不超过（12.32）式确定的N的程序集里选择。应该指出，从条件（12.27）式中选择的x_1的所有程序都属于此检查程序集。

再证明任何检查程序$Y_n(n<N)$，由程序X_n（由条件(12.27)式确定的）给出泛函的最小损失值。为此，我们证明下述辅助定理。

辅助定理12.2 假设$X=(x_0,x_1,\cdots,x_n,x_{n+1})$表示一组实数$0=x_0<x_1<\cdots<x_n<x_{n+1}=T$，以及函数$w_i(x_i,\cdots,x_{n+1})(i=0,\cdots,n)$，于是

$$\frac{\partial w_i(x_i,\cdots,x_{n+1})}{\partial x_i}<0,\quad i=0,\cdots,n;$$

$$\frac{\partial w_i(x_i,\cdots,x_{n+1})}{\partial x_j}>0,\quad i=0,\cdots,n+1,j=i+1,\cdots,n.$$

这时，如果存在向量$X^*=(x_0^*,x_1^*,\cdots,x_n^*,x_{n+1}^*)$满足

$$w_0(x_0^*,x_1^*,\cdots,x_{n+1}^*)=w_1(x_1^*,\cdots,x_{n+1}^*)=\cdots=w_n(x_n^*,x_{n+1}^*)=w^*.$$

那么

$$\min_X \max_{0\leqslant i\leqslant n} w_i(x_i,\cdots,x_{n+1})=w^*.$$

证明 假设向量$X\neq X^*$，满足

$$\max_i w_i(x_i,\cdots,x_{n+1})<w^*. \tag{12.33}$$

用x_k表示向量X下标最大的分量。对该分量$x_k\neq x_k^*$。由于$X\neq X^*$，所以有这样的k存在。由于$w_k(x_k,x_{k+1},\cdots,x_{n+1})$对第一个分量$x_k$是递减的（辅助定理2的条件），所以

$x_k > x_k^*$。因为当 $x_k < x_k^*$ 时，

$$w_k(x_k, x_{k+1}^*, \cdots, x_{n+1}^*) > w_k(x_k^*, \cdots, x_n^*) = w^*.$$

这同（12.33）式的假设矛盾。可见，$x_k > x_k^*$。但是，在这种情况下，$x_{k-1} > x_{k-1}^*$。实际上，如果 $x_{k-1} = x_{k-1}^*$，那么，根据辅助定理的条件知

$$\frac{\partial w_{k-1}(x_{k-1}, \cdots, x_n)}{\partial x_k} > 0,$$

$$w_{k-1}(x_{k-1}, x_k, \cdots, x_{n+1}) > w_{k-1}(x_{k-1}^*, x_k^*, \cdots, x_{n+1}^*) = w^*.$$

这同（12.33）式的假设矛盾。

如果 $x_{k-1} < x_{k-1}^*$，由辅助定理的条件可知

$$w_{k-1}(x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \cdots, x_{n+1}) > w_{k-1}(x_{k-1}^*,$$
$$x_k, \cdots, x_{n+1}) > w_{k-1}(x_{k-1}^*, \cdots, x_{n+1}^*) = w^*,$$

这也同（12.33）式的假设矛盾。

因此，由条件 $x_i \neq x^*$ 可得到 $x_i^* < x_i$，$(i=0, 1, \cdots, k)$，并且包括 $x_0^* = 0 < x_0 = 0$。这一矛盾说明：对向量 X 来说不存在满足（12.33）式的问题，即向量 X^* 是最优的。

由等式（12.25）可得出结论：函数 $w_k(x_k, x_{k+1}, \cdots, x_{n+1}) = A(X_n, x_k + 0)$ 满足辅助定理的所有条件。所以，由条件（12.27）确定的检查程序，比任何其它这样的检查范围的检查程序都好。

这样一来，可以从条件（12.30）所确定的程序集里选择最优检查程序 X^*。

为了确定最优程序就必须确定检查的范围。当程序 X_n 满足条件（12.27）时，来比较各损失 $\max\limits_{F \in \Omega} MA(X_n, \xi)$，而 n 满足 $\Delta_n > 0$。即，在所指出的条件下，求出对 n 的损失最小值。正如以上指出的那样，

$$\max_{F \in \Omega} MA(X_n, \xi) = \alpha_{n+1} A(X_n, T) + c_1(1-q)^n \Delta_n.$$

于是，所研究的函数增量等于

$$\max_{F \in \Omega} MA(X_n, \xi) - \max_{F \in \Omega} MA(X_{n+1}, \xi) = (sq + c)(1-q)^{n-1} + c_1(1-q)^{n-1}[(1-q)\Delta_n - \Delta_{n+1}] - (1-q)^{n-1}\left\{np\left(sp - c + \frac{cp}{q}\right) + (1-q)^{n-1}\left\{sp\left(\frac{p}{q} - p + q - 1\right) + c\left[\frac{p}{q}\left(\frac{p}{q} + p - 2 - 2q\right) + 1 - q\right]\right\} + sp\left(1 - \frac{p}{q}\right) + cp\left(\frac{2}{q} - \frac{p}{q^2}\right) + c_1Tp\right\}\left\{1 + \frac{p-q}{q}[1 - (1-q)^n]\right\}^{-1}\left\{1 + \frac{p-q}{q}[1 - (1-q)^{n-1}]\right\}^{-1}$$

$$= \frac{(1-q)^{n-1}\{n\alpha_1 + \alpha_3 + (1-q)^n\alpha_2\}}{p^2 + p(p-q)(2-q)(1-q)^{n-1} + (p-q)^2(1-q)^{2n-1}}. \tag{12.34}$$

式中

$$\alpha_1 = pq(spq - cq + cp);$$
$$\alpha_2 = (p-q)(spq - cq + cp);$$
$$\alpha_3 = spq(q-p) - c_1Tpq^2 + cp(2q-p). \tag{12.35}$$

增量（12.34）式是导数的模拟。由于此式的分母为正，所以增量的符号决定于分子

$n\alpha_1+(1-q)^n\alpha_2+\alpha_3$的符号。因此，确定最优检查程序$X_n^*$检查范围计算方法的步骤可归纳为：

1. 求出N，对于N满足$\Delta_N>0$，$\Delta_{N-1}\leq 0$（Δ_n由(12.30)式确定）。

2. 在[0，N]区域内，求出全部n_k（$k=1,2,\cdots,m$）。对于这些n_k满足

   $$\alpha_1 n_k+(1-q)^{n_k}\alpha_2+\alpha_3\leq 0,\ \alpha_1(n_k+1)+(1-q)^{n_k+1}\alpha_2+\alpha_3>0.$$

3. 从集合$\{n_0=0,n_1,\cdots,n_m,n_{m+1}=N\}$中求出$n_{k_0}$，满足

   $$\min_k\{\max_{\xi\in\Xi}MA(X_{n_k},\xi)\}=\max_{\xi\in\Xi}MA(X_{n_{k_0}},\xi).$$

最后，必须指出，全部特殊情形（$p=0, q=1$，且$p=q$）都是根据一般公式演变而来的。

特别需要研究的是$p=0, q=1$的情形。当检查不绝对可靠，且$n>0$时，

$$A(X_n,\xi)=\begin{cases}c_1(T-\xi)+nc, & x_0<\xi\leq x_1;\\ c+s, & \xi>x_1.\end{cases}$$

当$n=0$时，
$$A(X_0,\xi)=c_1(T-\xi),\quad x_0<\xi\leq T.$$

于是，当$n>0$时
$$\min\ \max\{nc+c_1T,s+c\}=\max\{c+c_1T,s+c\}.$$

当$n=0$时，最大损失等于c_1T，而因为$\max\{c+c_1T,s+c\}>c_1T$，便可得出结论：进行检查是不适宜的。

第十三章 技术维修的半马尔科夫模型

§13·1 概 述

在第十章中曾指出，技术维修的数学理论包括描述系统和某些随机过程的控制问题。由于对系统干扰的时间是一些离散的瞬时，所以叫做离散控制。本章将以有限状态集的半马尔科夫过程作为控制对象来研究。在关于初始特性（系统和部件的可靠性、实施各种维修的规则、故障显示特性以及维修期限）的一般假设条件下，用半马尔科夫过程描述技术系统的性态和技术维修（包括预防性维修），以便预防可能发生的故障。

本章将阐述关于贮备系统技术维修模型的一些结论。

§13·2 半马尔科夫过程的最优离散控制

参考文献[81]指出，有限状态集$E=\{e_1,\cdots,e_N\}$的半马尔科夫过程$\xi(t)$的函数集

$$\{Q_{ij}(t),i,j\in(1,2,\cdots,N),0\le Q_{ij}(t)\le 1,Q_{ij}(\infty)=p_{ij},\sum_{j=1}^{N}p_{ij}=1\},$$

对t是单调的。

现在假设，在时刻t控制半马尔科夫过程，使其转移到某一状态x，函数$Q_{ij}(t,x)$决定于x，x属于某一空间X。要指出，可能解的空间X是包含部件的闭联集。今后，我们认为在没有共同约束的条件下，X等于R^n，或等于其子集。我们仅研究齐次马尔科夫随机策略类，该策略在空间$X^N=\underbrace{X\times X\times\cdots\times X}_{N个}$内，由此空间决定了分布函数$\Phi(X_1,X_2,\cdots,X_N)$。根据这种看法，我们认为$x_i$是随机过程向状态$e_i$转移时刻的取值。于是

$$Q_{ij}(t)=\int_{X^N}Q_{ij}(t,x_i)d\Phi(x_1,\cdots,x_N)=\int_X Q_{ij}(t,x_i)d\Phi_i(x_i),$$

$$p_{ij}=\int_X p_{ij}(x_i)d\Phi_i(x_i),\quad p_{ij}(x_i)=Q_{ij}(\infty,x_i)。\qquad(13.1)$$

式中$\Phi(x_1,\cdots,x_N)$——空间X的测度。实质上，齐次马尔科夫随机策略决定于一组函数$\Phi_i(x)$，$i=1,\cdots,N$。

在可控制半马尔科夫过程$\xi(t)$的轨迹上求利润泛函的方法同[51]类似。令$\tau=\tau(e_i,e_j,x)$表示从状态e_i转移到状态e_j的随机时间。如果在此周期上取X的解x，那么从转移时刻起，经过时间$t(0\le t\le\tau)$的利润用$R_{ij}(t,\tau,x)$表示，而且一般认为$R_{ij}(0,\tau,x)=0$。这些转移的总利润为$R_{ij}(\tau,x)=R_{ij}(\tau,\tau,x)$。我们认为依转移概率序列计算的利润是加权的利润。

现在来研究可控制半马尔科夫过程的演变。首先，如果在某一时刻T过程转移到状态$e_i(\xi(T)=e_i)$，则根据分布函数$\Phi_i(x)$确定随机变量ξ_i的取值。其次，如果$\xi_i=x$，则随后的状态$e_j(j=1,\cdots,N)$决定于具有条件概率$p_{ij}(x)$的随机时间，在在状态e_i逗留的时间$\tau=\tau(e_i,e_j,x)$是服从分布$F_{ij}(t,x)=Q_{ij}(t,x)/p_{ij}(x)$的随机变量。最后，确定一周期的总利

润$R_i(\tau,x)$。该利润是在周期$(0,t)$里累计的全部利润。在时刻$t+\tau(\xi(t-\tau)=e_j)$随机过程$\xi(t)$转移到状态e_j后，上述过程重复出现。

我们认为要用很长的时间观察上述随机过程。我们的任务是建立一组分布函数$\Phi_i(x)$。在所观察的时间里该组分布函数$\Phi_i(x)$使平均利润率取最大值，并且当可能解在任意空间X中时，在齐次马尔科夫随机策略中确定最优策略。

文献[51]给出了平均利润率随半马尔科夫过程参数变化的表达式

$$I=\sum_{i=1}^{N}\rho_i\pi_i/\sum_{i=1}^{N}\nu_i\pi_i, \tag{13.2}$$

式中π_i——马尔科夫链状态转移概率p_{ij}的稳态概率；

$$\pi_k=\sum_{i=1}^{N}p_{ik}\pi_i,\quad \sum_{k=1}^{N}\pi_k=1, \tag{13.3}$$

$$\rho_i=\int_X\left[\int_0^\infty\sum_{j=1}^{N}R_{ij}(\tau,x)\mathrm{d}_\tau Q_{ij}(\tau,x)\right]\mathrm{d}\Phi_i(x) \tag{13.4}$$

——随机过程在状态e_i逗留周期的平均利润率；

$$\nu_i=\int_X\left[\int_0^\infty\sum_{j=1}^{N}\tau\mathrm{d}_\tau Q_{ij}(\tau,x)\right]\mathrm{d}\Phi_i(x) \tag{13.5}$$

——随机过程从转移到状态e_i的时刻到第一次返回该状态的时刻之间的平均时间。

如果考虑到等式（13.1），那么代数方程（13.3）的解为

$$\pi_k=\frac{1}{|P|}I_k(\Phi_1,\Phi_2,\cdots,\Phi_{k-1},\Phi_{k+1},\cdots,\Phi_N), \tag{13.6}$$

式中$|P|$——矩阵

$$\begin{matrix} p_{11}-1 & p_{21} & p_{31}\cdots p_{N-1,1} & p_{N1} \\ p_{12} & p_{22}-1 & p_{32}\cdots p_{N-1,2} & p_{N2} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots \\ 1 & 1 & 1\cdots 1 & 1 \end{matrix}$$

的行列式。

$$I_k(\Phi_1,\cdots,\Phi_{k-1},\Phi_{k+1},\cdots,\Phi_N)=\int_{X^{(N-1)}}A_k(x_1,\cdots,x_{k-1},x_{k+1},\cdots,x_N)\prod_{i\neq k}\mathrm{d}\Phi_i(x_i)$$

——Φ的线性泛函，而且函数$A_k(\cdot)$同$\Phi_i(x)$无关。

如果考虑到等式（13.4）和（13.5），那么由（13.2）和（13.6）式不难得出

$$I=\frac{\int_{X^{(N)}}A(x_1,x_2,\cdots,x_N)\prod_{i=1}^{N}\mathrm{d}\Phi_i(x_i)}{\int_{X^{(N)}}B(x_1,x_2,\cdots,x_N)\prod_{i=1}^{N}\mathrm{d}\Phi_i(x_i)}, \tag{13.7}$$

式中$A(\cdot)$和$B(\cdot)$是函数$R_{ij}(\tau,x)$和$Q_{ij}(\tau,x)$的函数，而与分布函数$\Phi_i(x)(i=1,\cdots,N)$无关。

对函数$A(\cdot)$和$B(\cdot)$存在的说明。函数$A(x_1,\cdots,x_N)$是半马尔科夫过程$\xi(t)$在相邻两次转移时刻之间在状态e_i逗留时间x_i（$i=1,\cdots,N$）的条件数学期望，此条件就是x_i；在相似的条件下，函数$B(x_1,\cdots,x_N)$是半马尔科夫过程$\xi(t)$在状态变化的周期持续时间的条件数学期望。

由此可见，在齐次马尔科夫随机策略中选择最优策略的问题可归结为求分布函数$\Phi_i(x)$的问题，并依此函数求泛函（13.7）式的极值。必须指出，如果只在随机过程$\xi(t)$状态转移的每一时刻逐次求解，而与过去的状态无关（马尔科夫过程），那么如同从（13.7）式看到的那样，选择最优策略的问题就可归结为根据独立随机变量分布集求极值的问题。

为了求解，利用§10·2和§10·3的结果。我们自然认为初始特性$Q_{ij}(t,x)$和$R_{ij}(t,x)$是函数$A(x_1,\cdots,x_N)$和$B(x_1,\cdots,x_N)$的约束。而在相反的情况下，泛函

$$\int_{X^{(N)}} A(x_1,\cdots,x_N)\prod_{i=1}^{N} d\Phi_i(x_i)$$

和

$$\int_{X^{(N)}} B(x_1,\cdots,x_N)\prod_{i=1}^{N} d\Phi_i(x_i) \tag{13.8}$$

可能是无约束的，而在所研究的问题中平均利润率失去了其物理意义。换言之，对于实际问题来说，函数$A(\cdot)$和$B(\cdot)$的约束条件实际上是无用的。由于函数$B(\cdot)$具有非负随机变量的意义（半马尔科夫过程$\xi(t)$相邻两次状态转移时刻之间的周期），所以（13.8）式的第二个泛函满足正值的条件。因此，当某一组分布函数$\Phi_i(x)$（$i=1,\cdots,N$）等式等于零，就说明随机过程$\xi(t)$不是总在变化的（这种情形不在讨论之列）。

总之，如果认为满足相应的条件，那么如§10.3所证明的，对于分布函数$\Phi^*(x_1,\cdots,x_N)$泛函

$$I(\Phi)=\frac{\int_{X^{(N)}} A(x_1,\cdots,x_N)d\Phi(x_1,\cdots,x_N)}{\int_{X^{(N)}} B(x_1,\cdots,x_N)d\Phi(x_1,\cdots,x_N)} \tag{13.9}$$

有极大值。$\Phi^*(x_1,\cdots,x_N)$在独立随机变量$\xi_1,\cdots,\xi_N$的分布函数集中定义，其中每一随机变量都以某一概率取值$\xi_i=c_i$（$i=1,\cdots,N$）。因求泛函（13.7）极值的分布函数集Ⅱ比求泛函（13.9）极值的分布函数集Ⅲ的范围小，而极值的函数$\Phi^*\in$Ⅱ，所以

$$\max_{\mathrm{II}} I(\Phi)=\max_{\substack{x_i<\infty\\ i=1,\cdots,N}}\frac{A(x_1,\cdots,x_N)}{B(x_1,\cdots,x_N)},$$

亦即它是在非随机策略集中得到的最优控制。

§13·3 储备系统的预防性维修模型

本节将研究储备系统的工作过程。令ξ——每个部件的无故障工作时间，其分布函数为$F(x)=P(\xi<x)$；ζ——工作部件故障的自动显示时间，其分布$\Phi(x)=P(\zeta<x)$。

下面，讨论技术维修策略。对于正常工作的部件实施计划的预防性维修的周期内，周期的变化决定了另一部件实施何种维修。假设在零时刻开始使用系统，在时刻ξ工作部件发生故障，而在时刻$\xi+\zeta$显示出故障，并立即实施计划外的应急预防维修，同时备用部件开始工作。用γ_1表示完成计划外应急预防维修的时间，其分布为$F_1(x)=P(\gamma_1<x)$。在时刻$\xi+\zeta$备用部件开始工作，规定经过时间η实施计划的预防性维修，η_1的分布为$G_1(x)=P(\eta_1<x)$。

技术系统状态继续转移的情形决定于随机变量ξ、ζ、η_1以及γ_1的相互关系，而这些随机变量决定于部件发生故障的时间、故障自动显示的时间、完成维修任务的时间（备用部件的使用）以及计划维修开始的时间等。

为了充分地描述维修策略，必须指出，除了指出随机变量的各种可能关系之外，还必须指出维修人员行为的影响。这时，我们假设预防性维修是随机应变的，即，如果已应该开始实施计划的预防性维修，但尚无备用部件（它处于维修状态），那么预防性维修就要推迟到备用部件维修好再开始。此外，或者在故障显示时刻，或者在实施计划的预防性维修开始时刻才能真正检查出部件的真实状态。

下面，介绍各种可能的维修策略。

1．$\xi>\eta_1>\gamma_1$——在时刻η_1开始计划的预防性维修。因为到时刻η_1前部件未发生故障并且具有正常状态的备用部件。备用部件在时刻η_1开始工作，同时对工作部件实施计划的预防性维修，维修时间为γ_0，其分布函数为$F_0(x)=P(\gamma_0<x)$。

2．$\gamma_1>\xi>\eta_1$——在时刻η_1没有备用部件，在时刻ξ对工作部件发生故障，实施计划外的应急维修。因为备用部件正在实施计划内预防性维修，当系统发生故障时便对发生故障的工作部件实施计划外的应急维修，而系统本身处于无工作能力的状态，到γ_1时备用部件维修好了并立即开始工作，系统才能恢复工作能力。在这种情况下，系统不能工作的时间为$\gamma_1-\xi$。

3．$\xi>\gamma_1>\eta_1$——在η_1无备用部件，计划的预防性维修要延迟开始。到了时刻γ_1完成了对备用部件的维修时，开始计划外的预防性维修（$\xi>\gamma_1$），同时备用部件开始工作。计划外应急维修的时间为γ_2，其分布为$F_2(x)=P(\gamma_2<x)$。

4．$\eta_1>\xi+\zeta>\gamma_1$——在时刻$\xi+\zeta$发现工作部件发生故障，由于在此时刻前备用部件已维修好，于是可对工作部件开始实施计划外的应急维修，同时备用部件开始工作。

5．$\eta_1>\xi+\zeta$且$\gamma_1>\xi+\zeta$——在时刻$\xi+\zeta$发现工作部件发生故障，但不能开始维修，因为备用部件正在维修。在备用部件完成维修的时刻γ_1时才能对发生故障的工作部件开始实施计划外的应急维修。

6．$\xi<\eta_1<\min(\gamma_1,\xi+\zeta)$——在时刻$\eta_1$前发现工作部件发生故障，但在时刻$\gamma_1$不能开始实施维修。到时刻$\gamma_1$有了备用部件便开始计划外的应急维修，同时备用部件开始工作。

7．$\max(\xi,\gamma_1)<\eta_1<\xi+\zeta$——在$\eta_1$时刻发现工作部件发生故障，并开始计划外应急维修。为了简单起见，假定维修时间为γ_2，其分布函数为$F_2(x)$。

在上述情形下，每当部件离开原位送修的时刻，就是备用部件开始工作的时刻。假定经过随机时间η实施计划的预防性维修，η的分布为$G_i(x)(i=1,2)$。i决定了处于维修状态部件的维修形式。

如果实施计划的预防性维修，那么分布函数为$G_1(x)$；

如果实施计划外的预防性维修，那么分布函数为$G_1(x)$；

如果实施计划的或计划外的应急维修，那么分布函数为$G_2(x)$。

在维修开始以后，根据上述维修方案重复全过程。

我们的任务是研究实施预防性维修的最优周期，即选择某一$G_i(x)(i=0,1,2)$求泛函的最佳值。

选择系统对日历时间的平均利润率作为确定最优维修周期的准则。为了获得平均利润率的表达式，就要研究部件开始维修的随机时刻$t_1,\cdots,t_n$。

现在假定随机过程$\xi(t)$在$t_n\le t<t_{n+1}$上取一个值；

$$\xi(t)=\begin{cases}E_0, & \text{如果在时刻}t\text{系统已开始计划的预防性维修;}\\ E_1, & \text{如果在时刻}t\text{,系统已开始计划的应急维修;}\\ E_2, & \text{如果在时刻}t\text{,系统已开始计划外预防性维修。}\end{cases}$$

在时刻 t_1，t_2，…随机过程$\xi(t)$的取值构成马尔科夫链；转移周期的持续时间$z_i=t_{i+1}-t_i$决定了在时刻t随机过程的取值。可见，随机过程$\xi(t)$是半马尔科夫过程。

为了获得平均利润率表达式，可利用§13·2的结果。在长期使用的条件下，平均利润率可以用半均过程转移周期的平均利润与该周期的平均持续时间之比表示：

$$S=\frac{s_0\pi_0+s_1\pi_1+s_2\pi_2}{v_0\pi_0+v_1\pi_1+v_2\pi_2}. \tag{13.10}$$

式中 π_i，$i=0$——马尔科夫链$\xi(t_n)$的平均转移概率；

s_i——第i周期的平均利润，这时$\xi(t_n)=E_i$；

v_i——第i周期的平均持续时间。

下面研究上述特性。首先确定状态转移的概率和平稳概率

$$p_{ij}=P(\xi(t_k)=E_i,\ \xi(t_{k+1})=E_j),\quad i,j=0,1,2.$$

当且仅当以下事件都出现的时刻就是从状态E_i转移到状态E_0的时刻：在规定计划的预防性维修时刻之后工作部件发生故障（$\xi>\eta_i$）；正在实施计划预防性维修的部件在规定的时间η_i内完成了维修($\gamma_i<\eta_i$)。因此

$$p_{i0}=P(\xi>\eta_i>\gamma_i)=\int_0^\infty \overline{F}(u)\,\mathrm{d}F_i(u)\,\mathrm{d}G_i(x)^*.$$

从状态E_i转移到状态E_2的时刻，即在另一部件完成维修后，工作部件发生故障的时刻（$\xi>\gamma_i$）；部件开始维修的时刻是在规定的计划预防性维修开始时刻之后（$\gamma_i>\eta_i$）。因而

$$p_{i2}=P(\xi>\gamma_i>\eta_i)=\int_0^\infty\int_x^\infty \overline{F}(x)F_i(x)\,\mathrm{d}G_i(x)^*.$$

最后
$$p_{i1}=1-p_{i0}-p_{i2}=\int_0^\infty\Big[1-\overline{F}(x)F_i(x)-\int_x^\infty \overline{F}(u)F_i(u)\,\mathrm{d}G_i(x)\Big]^*.$$

于是，用
$$P=\begin{vmatrix}p_{00}-1 & p_{10} & p_{20}\\ p_{01} & p_{11}-1 & p_{21}\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}$$
的行列式$|P|$表示时，

$$\pi_0=\frac{1}{|P|}\{p_{10}p_{21}+(1-p_{11})p_{20}\};$$

$$\pi_1=\frac{1}{|P|}\{(1-p_{00})p_{21}+p_{01}p_{20}\};$$

$$\pi_2=\frac{1}{|P|}\{(1-p_{00})(1-p_{11})-p_{01}p_{10}\}. \tag{13.11}$$

考虑到（13.11）式，便将（13.10）变为

$$S=\frac{s_0\{p_{10}p_{21}+(1-p_{11})p_{20}\}+s_1\{(1-p_{00})p_{21}+p_{01}p_{20}\}+s_2\{(1-p_{00})(1-p_{11})-p_{01}p_{10}\}}{v_0\{p_{10}p_{21}+(1-p_{11})p_{20}\}+v_1\{(1-p_{00})p_{21}+p_{01}p_{20}\}+v_2\{(1-p_{00})(1-p_{11})-p_{01}p_{10}\}}. \tag{13.12}$$

* 原文如此，可能有误——译注。

下面分析s_i、ν_i($i=0,1,2$)的计算。从问题的描述中可得出，开始维修（应急的或预防的）时刻为：

1．如果到显示系统发生故障的时刻前上述维修尚未结束（$\xi+\zeta<\gamma_i$，$i=0,1,2$）；或者如果到应该开始计划的预防性维修时刻前上述维修尚未结束（$\eta_i<\gamma_i$），则上述维修结束的时刻就是这次的开始时刻；

2．如果显示系统发生故障的时刻在上次维修结束时刻之后，而在规定的预防性维修开始时刻之前（$\gamma_i<\xi+\zeta<\eta_i$），则应在显示系统发生故障的时刻开始这次维修；

3．如果在规定的计划预防性维修开始时刻前已经结束上次维修（$\eta_i>\gamma_i$），或者尚未显示系统发生故障（$\eta_i<\xi+\zeta$），则应在规定的时刻开始这次维修。

因此，半马尔科夫过程$\xi(t)$在状态E_i逗留的周期等于：

γ_i，如果$\xi+\zeta<\gamma_i$，或者$\eta_i<\gamma_i$；

$\xi+\zeta$，如果$\gamma_i<\xi+\zeta$以及$\eta_i>\xi+\zeta$；

η_i，如果$\gamma_i<\eta_i$以及$\eta_i<\xi+\zeta$（原文为$\eta_i>\xi+\zeta$——译注）。

换言之，此周期的持续时间等于

$$z_k=t_{k+1}-t_k=\max\{\gamma_i,\min(\eta_i,\zeta+\xi)\}.$$

此式证明，随机过程$\xi(t)$在状态E_i逗留的时间决定于过程在该周期的状态，而与过去的状态无关。随机变量ξ、ζ、γ_i以及η_i是互相独立的，所以对于$i=0,1,2$来说

$$\nu_i=\int_0^\infty\{1-F_i(x)[1-\bar{G}_i(x)(1-\int_0^x F(x-u)d\Phi(u))]\}dx. \qquad (13.13)$$

其中$\bar{G}(x)=1-G(x)$。

下面，我们来研究系统在任意时刻t的状态特性的随机过程$\tilde{\xi}(t)$。系统的状态决定于工作部件的状态（正常的，或潜在故障的，或已显示出故障的），以及贮备部件的状态（处于贮备状态，或处于维修状态）。在这种情形下，双重贮备系统可能处于下列状态：

e_1——工作部件在正常工作状态，而贮备部件在维修状态；

e_2——工作部件在正常工作状态，而贮备部件处于贮备状态；

e_3——工作部件处于潜在故障状态，贮备部件处于维修状态；

e_4——工作部件处于潜在故障状态，而贮备部件处于贮备状态；

e_5——显示出工作部件处于故障状态，而贮备部件处于维修状态。

用τ_i表示开始维修的两相邻时刻之间随机过程$\tilde{\xi}(t)$在状态e_i逗留的随机时间。假设利润和损失与系统在各种状态下逗留的时间成一定的比例关系。

令$c^{(0)}$为部件在正常工作时间内得到的利润率，c_i（$i=0,1,2$）为部件在计划的预防性维修时的损失或在计划外的应急维修时的损失率，$\tilde{c}_i$（$i=0,1$）为部件处于潜在故障状态或显示出故障的状态下的损失率。于是，随机过程$\tilde{\xi}(t)=E_i$在周期内平均利润s_i为

$$s_2=(c^{(0)}-c_2)M\tau_1+c^{(0)}M\tau_2-(c_2+\tilde{c}_0)M\tau_3-\tilde{c}_0M\tau_4-(c_2+\tilde{c}_1)M\tau_5$$

$$=c^{(0)}(M\tau_1+M\tau_2)-c_2[M\tau_1+M\tau_3+M\tau_5]-\tilde{c}_0(M\tau_3+M\tau_4)-\tilde{c}_1M\tau_5. \qquad (13.14)$$

依定义可得出结论：

$$\tau_1=\min(\xi,\gamma_2),$$

$$\tau_2=\max[0,\min(\xi,\eta_1)-\gamma_1],$$
$$\tau_3=\max[0,\min(\gamma_1,\xi+\zeta)-\xi],$$
$$\tau_4=\max[0,\min(\eta_1,\xi+\zeta)-\max(\gamma_1,\xi)],$$
$$\tau_5=\max[0,\gamma_1-\xi-\zeta]. \tag{13.15}$$

由于这些随机变量互相是独立的，所以由（13.15）式可得出其数学期望为

$$M\tau_1=\int_0^\infty F(x)F_1(x)dx,\ M\tau_2=\int_0^\infty \bar{F}(x)G_1(x)F(x)dx,$$

$$M\tau_3=\int_0^\infty\int_0^\infty \Phi(z)F_1(x+z)dFdz,$$

$$M\tau_4=\int_0^\infty[G_1(x)F_1(x)\int_0^x\Phi(x-u)dF(u)]dx,\ M\tau_5=\int_0^\infty\int_0^\infty\Phi(z)\bar{F}_1(x+z)dF(x)dz, \tag{13.16}$$

其中$\bar{F}(x)=1-F(x)$。

由（13.15）式可直接得出$\tau_1+\tau_3+\tau_5=\gamma_1$，所以由（13.16）式可得到

$$M\tau_1+M\tau_3+M\tau_5=M\gamma_1=\int_0^\infty\bar{F}_1(x)dx,$$

$$M\tau_1+M\tau_2=\int_0^\infty\bar{F}(x)[1-F_1(x)G_1(x)]dx,$$

$$M\tau_1+M\tau_3=\int_0^\infty\int_0^\infty[1-G_1(x+z)F_1(x+z)]\Phi(z)dF(x)dz. \tag{13.17}$$

将（13.17）式代入（13.14）式后，可得到给定特性表示的利润表达式为

$$s_1=c^{(0)}\int_0^\infty\bar{F}(x)[1-F_1(x)G_1(x)]dx-c_1\int_0^\infty\bar{F}_1(x)dx-\tilde{c}_1\int_0^\infty\int_0^\infty\Phi(z)\bar{F}(x+z)dF(x)dz$$
$$-\tilde{c}_1\int_0^\infty\int_0^\infty[1-G_1(x+z)F_1(x+z)]\Phi(z)dF(x)dz. \tag{13.18}$$

用未知特性表示的平均利润表达式是根据（13.13）和（13.18）式代到（13.12）式中获得的。这里不赘述，仅指出泛函的具体形式：

$$S(G_0,G_1,G_2)=\frac{\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty A(x_0,x_1,x_2)dG_0(x_0)dG_1(x_1)dG_2(x_2)}{\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty B(x_0,x_1,x_2)dG_0(x_0)dG_1(x_1)dG_2(x_2)}.$$

式中$A(\cdot)$和$B(\cdot)$是根据等式（13.11）、（13.13）和（13.18）式求出的。

于是，得到描述维修特性的泛函显式。此泛函决定于函数$G(x)$。而$G(x)$决定了预防性维修周期。因此，描述维修特性的问题可归结为根据所有可能的分布函数$G_i(x)$（$i=0,1,2$）研究泛函极大值的问题。此问题曾在§10·3中研究过，在那里证明了最优函数$G^*(x)$可在退化分布函数集中找到。因此

$$\max_{G_0,G_1,G_2} S(G_0,G_1,G_2)=\max_{0\le x_i<\infty,\ i=0,1,2}\frac{A(x_0,x_1,x_2)}{B(x_0,x_1,x_2)}$$

的极大值点就是最优维修周期。

根据此通用公式，可以很容易得到当故障瞬时显示和无故障自动显示时的平均利润表达式。

此外，还要指出，所研究的特性——平均利润率——使一系列其它特性丰富起来了。特别是，设$c^{(0)}=1$，$\tilde{c}_i=\ ,\ =\ ,\ i=0,1,2$，便可得到可用度表达式。关于故障自动显示的双重贮备系统可用度的最优化问题，在文献[82]中研究过。

第十四章 复杂系统视情维修的最优化

§14·1 系统视情维修的最优化

假设系统状态随时间变化的过程用随机过程$x(t)$来描述。依从系统中获得的信息不同，可将随机过程$x(t)$分为简单的和复杂的两类，也可以分为一维的和多维的。由于我们只对系统的可靠性感兴趣，所以研究的过程$x(t)$就是确定系统在每一时刻t的状态：正常状态或故障状态。这说明，系统的全部状态空间X可分为两个子集：$X=X_+\cup X_-$，$X_+\cap X_-=\varphi$。若$x(t)\in X_+$，则系统处于正常状态；若$x(t)\in X_-$，则系统处于故障状态。系统的状态由X_+转为X_-，叫做系统发生故障。下面援引几个典型例子。

1．若在每一时刻t系统只处于一种状态——正常状态或故障状态，则随机过程$x(t)$可表示为简单的形式：

$$x(t)=\begin{cases}0, & \text{若系统处于正常状态；}\\ 1, & \text{若系统处于故障状态。}\end{cases}$$

2．若系统具有冗余能力，则当一部分部件发生了故障，不能使系统发生故障。假设不仅对系统的状态进行监控，而且对系统的n个部件也进行全面地监控。因此，系统的状态可用二值向量表示为

$$\mathbf{x}(t)=[e_1(t),e_2(t),\cdots,e_n(t)].$$

式中第k个部件在时刻t的状态用二值随机变量表示为

$$e_k(t)=\begin{cases}0, & \text{正常状态；}\\ 1, & \text{故障状态。}\end{cases}$$

3．假设上述模型的补充条件：在每一时刻t都知道第k个部件的工作时间$\theta_k(t)$（部件可能连续工作，也可能间断工作，因此部件的工作时间与时历时间可能不一致）。在这种情况下

$$\mathbf{x}(t)=[e_1(t),\theta_1(t);e_2(t),\theta_2(t);\cdots;e_n(t),\theta_n(t)].$$

4．在某些情况下，系统的一部分部件的状态不知道，但是可以观察其输出参数$\alpha(t)$，$\beta(t)$，…，这些参数能确定系统的状态。若这些参数在规定的范围内，即

$$\underline{\alpha}\leqslant\alpha(t)\leqslant\overline{\alpha};\quad\underline{\beta}\leqslant\beta(t)\leqslant\overline{\beta},\cdots,\tag{14.1}$$

则认为系统处于正常状态。在这种情形下，

$$\mathbf{x}(t)=[\alpha(t),\beta(t),\cdots].$$

用不等式（14.1）能确定系统处于正常状态子集X_+。有时这一子集的参数表达式不是平行六面体（14.1），而是更复杂的形式。譬如，陀螺工作时，在时刻t陀螺轴偏离初始位置是$\alpha(t)$和$\beta(t)$，而无故障的条件是$\alpha^2(t)+\beta^2(t)\leqslant c^2$。

一般，不需连续地观察$x(t)$。我们选择一时间间隔Δt，并观察在时刻$t_k=k\Delta t(k=0,1,\cdots)$的$x(t)$。令$x(t_k)=x_k$，所观察的随机变量或随机向量序列为$x_0,x_1,\cdots,x_k,\cdots$于是，

在时刻t_k之前的轨迹$(x_1,\cdots,x_k)=\mathbf{x}_k$就知道。

首先，假设在某一时刻t_k系统的状态X_k是唯一的（1或0），不干扰系统的工作而继续观察，或让系统停止工作并使其恢复到状态x_0。其次，假设系统的故障时刻t_k就是$x_1\in X_+,\cdots,x_{k-1}\in X_+$，$x_k\in X_-$的时刻。我们总是采用第二个假设。要记住，将系统恢复到初始状态不仅是将已发生故障的部件换成新的，而且还要用适当的方法将正在老化、磨损而尚未发生故障的部件恢复到初始状态。当然，并不是对所有的实际系统都是可能的，或是适当的。

现在来建立系统停止工作的费用函数。如果在系统停止工作前已经有故障了，那么这时损失包括系统的维修费以及与系统故障有关的损失。令c_1表示系统在停止工作前正常的条件下的费用，$c_2(c_2>c_1)$表示系统在停止工作前已经发生了故障的条件下的费用。当然，要把这些费用都列入单位时间的平均费用。所以，如果在时刻$t_n=n\Delta t$停止工作，则费用函数为

$$y_n=\begin{cases}c_1/t_n, & \text{系统正常；}\\ c_2/t_n, & \text{系统故障。}\end{cases}\tag{14.2}$$

下面引入停止工作规则，所谓停止工作规则是指随机变量ν的取值为$1,2,\cdots,n,\cdots$，以及系统在随机过程轨迹的空间上取对应值$\mathbf{X}(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)$的时刻停止工作。这时，下述约束是很重要的：事件$\{\nu=n\}$与$n$以后发生的任何事件$(x_{n+1},x_{n+2},\cdots)$无关，它只决定于停止工作的时刻$t_n$之前已发生的事件（即过程的轨迹）$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，它可记作$n$个相同空间$X_+$的笛卡尔乘积，即

$$X_n^+=\underbrace{X_+\times X_+\times\cdots\times X_+}_{n}.$$

应用集合的序列$A_n\subset X_n$能唯一地确定停止规则ν——随机过程的轨迹$\mathbf{x}_n$首次离开正常集A_n的时刻：$\nu=\inf\{n;\ \mathbf{x}_n\notin A_n\}$。如果发生故障前的时刻是正随机变量，则停止工作的时刻也是正随机变量，即$P(\nu<\infty)=1$。如果已确定了停止工作规则ν，则平均费用可用级数表示为

$$y(\nu)=\sum_{n=1}^{\infty}P(\nu=n)y_n.\tag{14.3}$$

式中y_n决定于(14.2)式。

令ν^*表示最优停止工作规则。若$y(\nu^*)=\min_{\nu}y(\nu)$，则称$\nu^*$为最优停止工作规则。如上所述，为了求出最优停止工作规则，必须找出任意集合A_n的数值ν的分布及$y(\nu)$的最小值；同时，使集合的序列变形。显然，对于一般条件来说，要找出有效的停止工作规则是不可能的。

随后，如果令空间集X是离散的，用有限的点代替空间集，那么计算量将大得计算机也难以计算的程度。但是，存在着杜巴定理[53]。对某些重要的个别场合有可能找到最优停止工作规则(详见[7,52])。这个定理的证明在[176,177]中，而简单的证明在[177]中，这里不详述。此定理的内容如下：

若满足下列条件，则停止工作规则是最优化的规则ν^*。

（1）$M\nu^*<\infty$；

（2）$M(y_{n+1}\mid x_1,\cdots,x_n)\begin{cases}\geq y_n, & n<\nu^*,\\ \leq y_n, & n\geq\nu^*;\end{cases}$

（3）$M(y_k - y_{k-1}, x_{k-1}) \leqslant c$，对所有$k$。
式中 c 是常数。

实际上，条件（1）总是能满足的。因为系统发生故障的时刻τ总是有限值，所以停止工作时刻$\nu^*\Delta t \leqslant \tau$的均值是有限的。条件（3）是费用函数的条件均值，也是总能满足的，因为由（14.2）式知，$y_1 \leqslant c_2 \Delta t_k$。可见，只有条件（2）才是需要检查的重要条件。在一般场合下不可能找到满足条件（2）的最优停止工作规则ν^*。但是，当过程$x(t)$在一个自然约束条件下，用杜巴定理有可能找到最优停止工作规则

我们来研究条件概率

$$P\{x_k \in X_k, x_{k-1}\} = q_k(x_1, \cdots, x_{k-1}) = q_k(x_{k-1}).$$

式中$P\{x_k \in X_k, x_{k-1}\}$——在时间$t_k$系统发生故障的概率。假定在时刻$t_k$之前系统过程的轨迹是给定的条件下，如果在时刻$t_1$已发生故障，则规定$q_k(x_1, x_2, \cdots, x_{k-1}) = 1$。假定此概率随$k$的增加而增加：

$$q_k(x_1, \cdots, x_{k-1}) \leqslant q_{k+1}(x_1, \cdots, x_{k-1}, x_k) \tag{14.4}$$

在可靠性理论模型中，此条件是很自然的，因为系统在使用一段时间后就会老化、变旧，因此，在两相邻时刻之间(t_{k-1}, t_k)系统发生故障的概率是随k的增加而增加的。

于是，利用条件

$$q_k(x_{k-1}) \begin{cases} \leqslant \dfrac{c_1}{(c_2 - c_1)(k-1)}, & k \leqslant \nu^*; \\[2ex] > \dfrac{c_1}{(c_2 - c_1)(k-1)}, & k > \nu^*. \end{cases} \tag{14.5}$$

确定最优停止工作规则ν^*。因为$q_k(x_{k-1})$对k不减，而分数$c_1/[(c_2 - c_1)(k-1)]$单调递减，所以用这些不等式能唯一地确定停止时刻。用直接检验法不难看出，规则（14.5）满足条件（2），因而也是最优的。为了利用规则(14.5)式，应在每一时间间隔上计算概率$q_k(x_{k-1})$，这在一般场合不是简单的问题。可是，如果序列$\{x_k\}$形成马尔科夫链，那么问题的难度可以减小。因为在这种情形下，概率q_k仅仅决定于最后一个观察值：

$$q_k(x_{k-1}) = q_k(x_{k-1}).$$

同时，假定状态变量x_k的取值为有限数或可数数，可记作$0, 1, 2, \cdots, n, \cdots$，于是状态集$X_k$可记作$X_k = \{0, 1, 2, \cdots, n\}$。（要注意，如果状态变量是连续的，那么在一定精度下总是可以测量出来的）

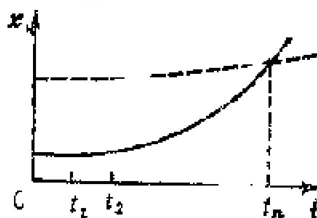


图 14.1

令

$$p_{ij}(k) = P\{x_{k+1} = j \mid x_k = i\}$$

表示马尔科夫链的转移概率。于是

$$q_k(x_{k-1}) = \sum_{j=0} p_{x_{k-1}, j}(k-1).$$

要指出，技术参数的变化往往不是马尔科夫过程。譬如，我们观察图14.1中两个参数的观察值，在时刻t_n两个参数具有相同的观察值坐标，可是第一个观察值（连续曲线）在时刻t_n之前的变化较快，而第二个观察值(虚线)则较慢。这说明，技术参数的变化是非马尔科夫过程。可以研究二维过程[$x(t)$, $\dot{x}(t)$]。因为我们观察的时间是离散的，即我们研究一对

$(x_n, \ldots, x_n) = z_n$。对这一新过程，可利用上面所列举的公式和建议，同时用z_n代替公式中的x_n。

§14·2 按其它准则的最优化

下面，研究§14·1中的最优化模型。在某一时刻$\tau = t$，系统停止工作，这时的费用是随机变量C。根据停止工作时系统有无故障，随机过程$\{x_n\}$取值为1或0。在§14·1中所引用的最优停止工作规则是根据费用函数MC/τ和杜巴定理导出的，但它不及根据另一费用函数$MC/M\tau$导出的更好。

假设对N（较大）个同型系统观察从工作开始到停止之间的时间间隔（另一方案——在长时间内观察一个系统发生N次故障，系统每次发生故障后都经修复恢复到初始状态——在数学上是等价的）。令$\tau^{(1)}, \tau^{(2)}, \cdots, \tau^{(N)}$——到停止工作时刻前的时间；$c^{(1)}, c^{(2)}, \cdots, c^{(N)}$——对应的费用。于是，$T_N = \tau^{(1)} + \tau^{(2)} + \cdots + \tau^{(N)}$——总工作时间；$C_N = C^{(1)} + C^{(2)} + \cdots + C^{(N)}$——总费用。

当然，在建立费用函数时，要考虑总费用是在总时间内产生的，即C_N/T_N。但是，对于较大的N，依大数定理知

$$\frac{C_N}{T_N} = \frac{(c^{(1)} + \cdots + c^{(N)})/N}{(\tau^{(1)} + \cdots + \tau^{(N)})/N} \sim \frac{MC}{M\tau}.$$

对于这样的费用函数来说，杜巴定理及其导出的结果都不正确，所以不得不用另外的方法来研究。

假设在时刻$t_n = n\Delta t$，用过程的观察值序列$\{x_n\}$来表示维修过程，即过程的增量$x_n - x_{n-1} = \xi_n$是独立同分布的

$$P\{\xi_n < x\} = F(x); \quad P\{x_n < x\} = F_n(x),$$

式中

$$F_n(x) = \int_0^\infty F_{n-1}(x-u)\,dF(u); \quad F_1(x) = F(x)。$$

因为序列$\{x_n\}$是马尔科夫过程，当然控制也是马尔科夫过程，即仅仅根据过程变量的最后一次观察值决定停止工作规则。令系统正常状态的值域是$X_+ = [0, a]$，则对于每一时刻t_n选择一个水平a_n（$a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n$），并且规定过程序列$\{x_n\}$在第一次超过水平$a_n$的时刻$t_n$停止工作，即停止时刻$t_\nu$决定于条件

$$x_1 \leqslant a_1, x_2 \leqslant a_2, \cdots, x_{\nu-1} \leqslant a_{\nu-1}, x_\nu > a_\nu。$$

在此停止工作时刻，系统可能有故障，也可能无故障，现引入两相应的事件：

$$A_n = \{x_1 \leqslant a_1, \cdots, x_{n-1} \leqslant a_{n-1}, a_n < x_n \leqslant a\}$$

——在时刻t_n系统停止工作，但未发生故障，由系统从时刻t_1到t_n的状态观察值组成的集合；

$$B_n = \{x_1 \leqslant a_1, \cdots, x_{n-1} \leqslant a_{n-1}, x_n > a\}$$

——在时刻t_n系统停止工作，且已发生故障，由系统从时刻t_1到t_n的状态观察值组成的集合。

假设在停止时刻有故障，费用等于$C + k$（其中k——因系统发生故障的罚款）；无

故障时，费用等于$C^{(1)}$。于是

$$MC=C^{(1)}\sum_{n=1}^{\infty}P\{A_n\}+(C^{(1)}+A)\sum_{n=1}^{\infty}P\{B_n\}=C^{(1)}+A\sum_{n=1}^{\infty}P\{B_n\},$$

$$M\tau=\sum_{n=1}^{\infty}n\Delta t(P\{A_n\}+P\{B_n\}).$$

式中

$$P\{A_n\}=\int_0^{a_{n-1}}[F(a_{n-1}-x)-F(a_n-x)]dF_{n-1}(x);$$

$$P\{B_n\}=\int_0^{a_{n-1}}F(a_n-x)dF_{n-1}(x).$$

由此可知

$$MC=C^{(1)}+A\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{a_{n-1}}\overline{F}(a_n-x)dF_{n-1}(x),$$

$$M\tau=\Delta t\sum_{n=1}^{\infty}F_n(a_n).$$

由条件$\partial/\partial a_n(MC/M\tau)=0$可求出费用函数$MC/M\tau$的极值，并求出$AF(a-a_n)M\tau=MC$。由此得出结论：全部$a_n$应该满足$a_n=a_0<a$。于是，

$$MC=C^{(1)}+A\int_0^{a_0}F(a-x)dH(x)+AF(a),$$

$$M\tau=\Delta tH(a_0)$$

式中$H(x)=\sum_{n=1}^{\infty}F_n(x)$；$h(x)=H'(x)$——更新密度函数。费用函数对$a_0$的导数等于

$$\frac{\partial}{\partial a_0}\left[\frac{MC}{M\tau}\right]=\frac{\Delta th(a_0)}{(M\tau)^2}\left[A\int_0^{a_0}H(x)f(a-x)dx-C^{(1)}-A\overline{F}(a)\right].$$

在[ ]中的表达式对a_0单调递增。当$a=a_0$时，它等于$AH(a)-C^{(1)}-A$。若此和是负的，则导数在区间$[0,a]$上都是负的，而费用函数在$a=a_0$时等于最小值。在这种情形下，只有在发生故障的时刻过程才能停止。若此和是正的，则费用函数的最小值点是下式之解。

$$A\int_0^{a_0}H(x)f(a-x)=C^{(1)}+A\overline{F}(a).\tag{14.6}$$

现在来求此方程的近似解。假设水平a大于平均增量$M(x_n-x_{n-1})$很多倍，这说明到停止时刻前所观察的次数很多。方程（14.6）可写成

$$AH(a)=C^{(1)}+A+A\int_{a_0}^{a}H(x)f(a-x)dx.$$

由于a应趋于a_0，表明$a_0=a-\delta$，但由上方程可以导出

$$\overline{F}(\delta)H(a)\approx(C^{(1)}+A)/A.$$

正如[78]指出的，当自变量较大时，更新函数的近似关系为

$$H(a)\approx a/T$$

式中$T=\int_0^{\infty}xdF(x)$——随机过程增量的均值。最后，得到

$$\overline{F}(\delta)=(C^{(1)}+A)T/(Aa).\tag{14.7}$$

总之，我们已指出，当随机过程$x(t)$是具有独立的稳定增量的过程时，在每一步上都可选择相同的水平$a_n=a_0$，而$a_0=a-\delta$或者根据方程（14.6）解出；或者在高临界水平下到过程停止时刻前观察的次数很大时，根据方程（14.7）解出。用上述方法证明的$a_n=a_0$不是严格的。但是，应用功能分析法可以严格地证明。

§14·3 半马尔科夫模型

在[201]中首先阐述了可控制半马尔科夫过程的系统模型，并综述了马尔科夫模型[198]。В·Ф·沃斯科列夫（Восксбоев）在[6,38,39]中阐述了这些模型的发展。在理论计算方面，如限制大数时，关于线性规划问题的论述，关于系统不完全更新问题的计算等，在附录的计算方面（得出了数字解）都有论述。下面阐述的问题都是上述著作的结论。

这里只研究有限状态（$i=0,1,\cdots,L$）的系统。假设状态0表示系统是新的，状态L表示系统是有故障的。可以认为系统的状态变化过程是可控制的半马尔科夫过程，即对于每一状态都要给出下列条件：

$\{a_{ik}\}$——由状态i转移到状态k的集合（$i=0,1,\cdots,L$；$k=0,1,\cdots,K$）；

p_{ij}^k——马尔科夫过程从状态i经k步转移到状态j的转移概率矩阵；

F_{ij}^k——从状态i经k步转移到状态j，在状态i逗留时间的分布；

r_i^k——与k有关的单位时间费用。

令D_{qj}——参数从状态q转移到状态j的转移概率i，其次，设给定的稳态转移概率矩阵q_{iq}，其大小对不可控制链起决定作用。在这种情况下，

$$p_{ij}=\sum_{q=1}^{\infty}q_{iq}D_{qj}.$$

令$\pi_j(j=0,1,\cdots,L)$——马尔科夫链在状态j逗留的稳态概率。于是，稳态概率能满足方程组

$$\pi_j\geqslant 0;\ \sum_{j=0}^{L}\pi_j=1;\ \pi_j-\sum_{i=0}^{L}\sum_{k=1}^{K}\pi_i p_{ij}^k d_{ik}=0. \tag{14.8}$$

如果令η_i^k表示在半马尔科夫过程中，计算经k步转移而在状态i逗留时间的无条件数学期望，那么

$$\eta_i^k=\sum_{j=0}^{L}p_{ij}^k b_{ij}^k.$$

式中b_{ij}^k——在计算k步转移时，从状态i转移到已知状态j，在状态i逗留时间的无条件数学期望，$b_{ij}^k=\int_0^k t\,\mathrm{d}F_{ij}^k(t)$。

令$\pi_i a_{ik}=x_{ik}$，则

$$u=\sum_{i=0}^{L}\sum_{k=1}^{K}\pi_i r_i^k x_{ik}\left(\sum_{i=0}^{L}\sum_{k=0}^{K}\eta_i^k x_{ik}\right). \tag{14.9}$$

式中

$$x_{ik}\geqslant 0,\ i=0,\cdots,L,\ k=1,\cdots,K;$$
$$\sum_{k=1}^{K}x_{jk}-\sum_{i=0}^{L}\sum_{k=1}^{K}p_{ij}^k x_{ik}=0,\quad j=0,\cdots,L;$$
$$\sum_{i=0}^{L}\sum_{k=1}^{K}x_{ik}=1. \tag{14.10}$$

然后，再选择x_{ik}，以便在约束（14.10）下将（14.9）化为最小值。

我们将问题归结为已知的算法，卡门用以公

$$y_{jk}=\eta_j^k x_{jk}\Big(\sum_{j=0}^{L}\sum_{k=1}^{K}\eta_j^k x_{jk}\Big)^{-1}. \tag{14.11}$$

于是，使（14.9）和（14.10）式变为

$$u=\sum_{j=0}^{L}\sum_{k=1}^{K}r_j^k y_{jk}. \tag{14.12}$$

式中　$y_{jk}\geqslant 0, j=0,\cdots,L,\ k=1,\cdots,K,$

$$\sum_{k=1}^{K}\sum_{i=0}^{L}p^k_{ij}\frac{y_{ik}}{\eta_i^k}-\sum_{k=1}^{K}\frac{y_{jk}}{\eta_j^k}=0, j=0,\cdots,L,$$

$$\sum_{j=0}^{L}\sum_{k=1}^{K}y_{jk}=1. \tag{14.13}$$

这样，可把问题归结为线性规划问题：在线性约束下，对于常数y_{jk}，（14.13）式使（14.12）化为最小值。

在上述情况下，系统状态的变化是具有稳态转移概率的可控制马尔科夫链，$\eta_j^k=1$，$y_{jk}=x_{jk}$。在约束（14.10）下，

$$u=\sum_{j=0}^{L}\sum_{k=1}^{K}r_j^k x_{jk}. \tag{14.14}$$

在（14.14）式的条件下，上面所研究的马尔科夫链最优控制策略是齐次马尔科夫的[35]。看来，最优控制策略也是类似的．而这里所研究的整个过程是半马尔科夫过程。

第十五章　最优贮备问题

§15·1　概　　述

提高系统可靠性最常用的方法之一是使其构结具有冗余能力，通常，用有效的功能辅助环节，或者用贮备部件和设备。在复杂网络系统中，如在通讯系统中，可以在某些点之间增设新的通讯渠道，而这些点原来是不连通的。

在应用冗余能力提高系统可靠性的方法中最常用的是贮备。为了使在一定费用下达到最高的可靠性，或者为实现给定可靠性指标而出现了工作寿命分布的最优化问题[10，122，144]。为了解决类似的工程问题，人们已经研究了并继续研究着各种计算方法。

五十年代中期在[125]中首先提出了由独立部件组成的串联系统的最优贮备问题。不久，为了解决最优贮备问题，开始利用离散的最优化法：动态规划法[11，12，169]、改进的动态规划法[10，197]以及坐标下降法[10，123，139，140]。以后，又充分地研究了整数最优化的综合算法、布列夫规划法及其分支、改进的各种边界处理法[1，2，27]等。必须指出，在最优化问题中，约束数目对计算的复杂程度影响很大，在解多维问题时，为了计算迅速，最好采用对偶理论的方法[50]。

与开发最优贮备的同时，使得解此问题的工作也复杂了。例如，在动态贮备中，在预先规定的时刻，或在系统状态失常的时刻使贮备部件转入工作状态。这个时刻可能是或者就是系统在该阶段的解[80，92，122，123]。解决这些问题对于特殊部件的控制问题有重要作用。所谓最优贮备问题，是指研究部件因故障而随机消耗贮备部件所需周期性补充散件数的问题。在[119，125—127，152]中曾经探讨过（虽然不多）系统最优贮备问题。人们对非离散性泛函的最优化问题（如，系统平均无故障工作时间）[142，145]以及在系统的使用维修信息很少的条件下的最优化问题[144，146]也感兴趣。

§15.2　简单的最优贮备问题

问题的提出　下面研究由n个独立部件或者子系统组成的串联系统。每一子系统又可能是串联的、并联的或相同部件组成的其它模型。于是，如果问题是用贮备部件保证系统的可靠性，那么当系统的工作部件发生了故障就从同类部件中提取一个进行更换。

令$R_i(x_i)$表示具有x_i个贮备部件的第i个子系统的可靠度，$i=1，2，\cdots，n$。首先研究串联系统的可靠度，在各子系统的故障独立的条件下，系统的可靠度为

$$R(\mathbf{X})=\prod_{i=1}^{n} R_i(x_i),\tag{15.1}$$

取对数后

$$L(\mathbf{X})=\sum_{i=1}^{n} L_i(x_i)\tag{15.2}$$

式中，$\mathbf{X}=(x_1,\cdots,x_n)$。显然，用$L(\mathbf{X})$计算比较方便。

令c_i——第i型部件的价格，$\mathbf{C}=(c_1, \cdots, c_n)$——所有部件的价格向量。如果关于费用是线性函数的假设正确（此假设是很自然的，通常研究最优化问题时都要用到它），那么贮备部件的总费用就是向量的数量积之和：

$$C(\mathbf{X})=(\mathbf{C}, \mathbf{X})=\sum_{1\leq i\leq n} c_i x_i,$$

而最优贮备的对偶问题可记作

$$\max_{X}\{L(\mathbf{X}) \quad C(\mathbf{X})\leqslant C_0\}^*, \tag{15.3}$$

$$\min_{X}\{C(\mathbf{X}) \quad L(\mathbf{X})\geqslant L_0\}, \tag{15.4}$$

式中C_0，L_0分别表示允许的费用，要求的可靠性指标。

那么，在上述条件下的最优贮备问题就是离散规划问题，下面，我们来详细地研究其计算方法。

坐标下移法 下面研究向系统补充贮备部件的过程。设开始时，系统中具有的贮备部件数为$\mathbf{X}^0=(x_1^0, \cdots, x_n^0)$。在最优化贮备中，开始时取分量$x_i^0(i=1, \cdots, n)$是非零值比较合理（关于分量的选择问题将在后面单独讨论）。在第$k(k=0,1,2,\cdots)$步前计算出数

$$\gamma_i(x_i^k)=c_i^{-1}[L_i(x_i^k+1)-L_i(x_i^k)], \qquad i=1, \cdots, n.$$

补充到系统中工作的贮备部件，满足条件$x_j^k=\arg\max_{1\leq i\leq n}\gamma_i(x_i^k)$，于是，第$k+1$步$\mathbf{X}^{k+1}=\mathbf{X}^k+\mathbf{e}_j$，式中$\mathbf{e}_j$表示除第$j$个分量等于1以外，其它分量均为零的向量。当过程进行到第一次破坏问题的条件$C(\mathbf{X}^{N+1})\leqslant C_0$，或$L(\mathbf{X}^N)\geqslant L_0$时，过程就停止。

若已知全部部件的价格都相等，即$c_i=C$，则对于任意单调增凸函数$L_i(x_i)$来说，在约束条件为$\sum_{1\leq i\leq n} x_i$时，应用坐标下降法可以找到综合的条件极值。若价格c_i不同，则用坐标下降法有可能找到综合的条件极值。若同时满足条件的话[10]：

函数$R_i(x)$的对数$L_i(x)$严格上凸，即

$$\Delta L_i(x)=L_i(x+1)-L_i(x)>0,$$

$$\Delta^2 L_i(x)=\Delta L_i(x+1)-\Delta L_i(x)<0.$$

将向量$\mathbf{X}=(x_1, \cdots, x_n)$代入两个泛函——可靠性特征量$L(\mathbf{X})$和费用特征量$C(X)$，则在停止点上满足$C(\mathbf{X}^N)=C_0$或$L(\mathbf{X}^N)=L_0$，向量$\mathbf{X}^k$叫做占优势向量。如果

$$L(\mathbf{X}^k)=\max_{X}\{L(\mathbf{X}) \quad C(\mathbf{X})\leqslant C(\mathbf{X}^k)\}, \tag{15.5}$$

那么，用坐标下移法能建立占优势向量的全部子集序列。下述定理可说明这一点。

定理15.1 如果用坐标下移法得出的向量为$\mathbf{X}^k$，则此向量满足条件（15.5）式。

证明 用反证法证之。令$\mathbf{X}^*$是不等于$\mathbf{X}^k$的一个向量，它满足$C(\mathbf{X}^*)\leqslant C(\mathbf{X}^k)$和$L(\mathbf{X}^*)>L(\mathbf{X}^k)$，或者$\delta=L(\mathbf{X}^*)-L(\mathbf{X}^k)>0$。用向量$\mathbf{X}^*$和$\mathbf{X}^k$中的$n$对分量组成集合$G$和$\overline{G}$，当$x_i^*>x_i^k$时属于集合$G$，当$x_i^*<x_i^k$时属于$\overline{G}$。在构造向量$\mathbf{X}^k$时，令$\gamma_i(x_i^k)=\gamma_0$。即，应用坐标下移法可得到

$$\gamma_i(x_i^k)\leqslant\gamma_0\leqslant\gamma_i(x_i^k-1), \qquad i=1, \cdots, n.$$

于是

$$\delta=\sum_{i\in G}[L_i(x_i^*)-L_i(x_i^k)]-\sum_{i\in\overline{G}}[L_i(x_i^k)-L_i(x_i^*)]$$

---

* 式中下标X应为大写黑体的，下同。

$$\leqslant \sum_{i \in I_1} (x_i^* - x_i^k) c_i \gamma_0 - \sum_{i \in I_2} (x_i^k - x_i^*) c_i \gamma_0$$

$$\leqslant \gamma_0 \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^* c_i - \sum_{i=1}^{n} x_i^k c_i \right) = \gamma_0 [C(\mathbf{X}^*) - C(\mathbf{X}^k)].$$

根据上述假设$C(\mathbf{X}^*) < C(\mathbf{X}^k)$，且因$\gamma_0 > 0$，故所得到的$\delta > 0$与假设矛盾。证毕。

根据某些约束条件给出的这个简单证明方法引自[10]。

高可靠性系统最优贮备的近似解 如果系统中第i个子系统具有x_i个贮备部件，该子系统的故障概率为$Q_i(x_i)$满足条件 $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} Q_i(x_i) \ll 1/n$，且各部件的故障是相互独立的，则很容易求出最优贮备的近似解。根据这些假设，最优贮备的对偶问题为

$$\min_{X} \left\{ \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} c_i x_i \mid \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} Q_i(x_i) \leqslant Q_0 \right\}.$$

应用拉格朗日乘数法或坐标下移法可得到最优贮备问题之解满足以下条件

$$[R_i(x_i + 1) - R_i(x_i)] / c_i R(x_i) \approx \gamma^*, \text{ 对全部 } i = 1, \cdots, n.$$

式中γ^*——某一常数。若考虑到$Q_i(x_i)$很小，则

$$\gamma^* \approx Q_i(x_i) / c_i \tag{15.6}$$

满足可靠性指标的条件可记作 $\sum\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} Q_i(x_i) \approx Q_0$。经代换后，解方程

$$Q_i(x_i) = Q_0 c_i \left(\sum_{1 \leqslant i \leqslant n} c_i \right)^{-1}$$

便可得到所求的解。

如果利用对偶问题的多个解，同时借助于任何一种内插法便可求解最优贮备的正问题。

对于许多工程问题完全可以采用近似解，由于一般原始数据的可信性较低，它能掩盖计算方法的不准确性。此外，近似计算的结果可以作为精确计算方法的初始近似值。

动态规划法 一般应用动态规划法解最优贮备的正问题所建立的整数方程为

$$\varphi_n(C_0) = \max_{0 \leqslant x_n \leqslant C_0 / c_n} [L_n(x_n) + \varphi_{n-1}(C_0 - x_n c_n)], \tag{15.7}$$

而对于解对偶问题所建立的方程为

$$\varphi_n^*(L_0) = \min_{0 \leqslant x_n \leqslant L_n^{-1}(L_0)} [c_n x_n + \varphi^*_{n-1}(L_0 - L_n(x_n))]. \tag{15.8}$$

式中L^{-1}——L的反函数。这里的上限x_n是满足不等式$L_n(x_n) \leqslant L_0$的最大整数。

根据初始条件、方程（15.7）和（15.8）可递推地求出满足上述方程的解为

$$\varphi_0(C) = 0, \varphi^*_0(L) = 0, \varphi_1(C) = L_1(]C/c_1[), \varphi^*_1(L) = c_1]L_1^{-1}(L)[.$$

式中$]x[$表示x的整数部分。这里不再研究在标准计算程序中用动态规划法计算最优贮备问题[11，12]，而且只研究方法的改进，这正是解这些问题所需研究的问题[10，197]。实际上，这些程序是在建立优势序列系统中形成的。

显然，对一维情形来说，占优势序列$\{X_{1(i)}^{(i)}\}$的各项是自然序列$\mathbf{X}_{1(1)}^{(1)} = x^{(1)} = 1$，$\mathbf{X}_{1(i)}^{(2)} = x_i^{(2)} = 2$，$\cdots (i = 1, 2, \cdots, n)$。这里上标是占优势序列的序号；第一个下标是占优势序列的维数；第二个下标是区间序号，在该区间排列成占优势序列的序号（随后是相应的区间号）。

s维向量$\mathbf{X}_{s(i)}^{(k)}$ $(k = 1, 2, \cdots)$ 是由$\mathbf{X}_{s(i)}^{(k)} = (\mathbf{X}_{l}^{(j)}, \mathbf{X}_{s-l}^{(m)})$构成的，式中$l, m \leqslant s$而且这些向量满足条件（15.5）式。

从任意k维向量X_k^{s}，（s=1，2，…）中能得到$X_{k(\alpha_1,\alpha_2)}^{s}=(X_{k_1\alpha_1}^{*}, X_{k_2\alpha_2}^{*})$，式中$l$，$m\leqslant s$；$\alpha_1$和$\alpha_2$表示下标$i$（$i$=1，2，…，$m$）的某些集合，而且$\alpha_1\cup\alpha_2=\alpha$，$\alpha_1\cap\alpha_2=\phi$；$k_1=|\alpha_1|$，$k_2=|\alpha_2|$，即等于进入相应的集合的下标数。

应指出，在建立顺序的占优势序列时，原则上使用小于维数的占优势序列的所有项，尽管不是全部重新形成的向量都包括在序列里。因为不是都能满足条件（15.5）的。这是由于在该序列中与完全过程相比较，计算量缩小了。

建立n维向量占优势序列X_{n}^{s}，（s=1，2，…）能得到问题的解。现在，求上标s。对于最优贮备的正问题

$$C(X_{n}^{s}) \leqslant C_0 \leqslant C(X_{n}^{s+1}),$$

而对于对偶问题

$$L(X_{n}^{s+1}) \leqslant L_0 \leqslant L(X_{n}^{s})$$

然后，再按照X_{n}^{s}相反的顺序求出小于维数的向量$X_{l}^{s'}$，$X_{m}^{s''}$。式中I_l，I_m——下标对应的子集，它们是$I_l\cup I_m$=1，2，…，n，$l+m=n$，而$s'\leqslant s$和$s''\leqslant s$。类似的程序一直继续到找出一维向量x_i^{*}（i=1，…，n）为止。这种向量也是占优势向量X_{n}^{*}。

递推程序法 根据此方法，从初始占优势序列X_{1}^{s}（s=1，2，…；i=1，…，n）开始构成序列$\{X_{(1,2)}\}$，$\{X_{(1,2,3)}\}$，…直到最后构成序列$\{X_{(1,2,\cdots,n)}\}$为止。

二分法 首先，构成二维向量序列$\{X_{(1,2)}\}$，$\{X_{(3,4)}\}$，…；然后，构成四维向量序列$\{X_{(1,2,3,4)}\}$，$\{X_{(5,6,7,8)}\}$，…；依此类推，直到构成最后的序列$\{X_{(1,2,\cdots,n)}\}$为止。

不同解法的比较 对于分析实际问题来说，用改进的动态规划法能解出需要的结果，即方法的准确性和计算量的关系是合理的。

用坐标下降法所得到的解之集$\{X^*\}$是由占优势序列解之子集$\{X\}$构成的。即在空间（L，X），$C(X)$内形成凸集外壳各点之子集。用该法所得解的绝对误差不超过$\Delta C=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} c_i$。当允许增加解的范围时，解的相对精度会增加。在同一时间内，用动态规划法和改进的动态规划法计算，计算量随允许范围的增加而大大地增加。

须知，在可靠性工程中，实际上很少需要绝对精确的最优解，这是因为在大多数情况下，原始数据（无论是可靠性指标还是价格）都是已知的，且其可信性很低。

§15.3 在某些约束下最优贮备量的计算

在实际工作中，必须解决在某些约束下最优贮备问题[10，14]。

令每个部件用几个参数说明其特点：价格、质量、外廓尺寸、第i区间第j型部件耗费用。在这种情形下，第j型部件的总费用可用$C_j=\sum\limits_{1\leqslant i\leqslant n} c_{ij}x_i$计算。

当有某些约束下，最优贮备问题可用下列方程表示。

1．当每个贮备件的价格不超过一定限制C^*时，必须找出$R(X)$的最大值，

$$\max_X \{R(X) \mid C_j(X)\leqslant C^*,\ j=1,\ \cdots,\ m\}.$$

（甚至当可靠度不低于所要求的指标R^*时，还可解出m个函数$C_k(X)$的m个最小值，而其它

型全部费用指标都不超过给定的一些C_i^0（$i\neq k$，$i=1, 2, \cdots, m$）。）

2．在同时满足m个子系统的可靠性指标时，求系统费用的最小值[12，37]：

$$\min_{X}\{C(\mathbf{X}) \mid R_j(\mathbf{X}) \geq R_j^0,\ j=1,\cdots,m\}.$$

式中j——工作子系统的序号，组成该子系统的部件都属于集G_j，显然，$G=\bigcup_{1\leq j\leq m} G_j$是系统所有部件之集。

如果子系统是独立的，即不包含共同部分（$G_j \cap G_k=\phi$，对于全部$j\neq k$），那么问题就变为m个对偶最优贮备问题。对于$G_j \cap G_k \neq \phi$的某些j和k，问题可能转化为布列夫（Булев）规则问题。

同上述结果一样，若每个部件按下列规则规定价格，则用坐标下移法和改进的动态规划法都可解第一个问题。令$\mathbf{C}_i=(C_{i1}, C_{i2}, \cdots, C_{im})$，引入任一单纯形$\tilde{\mathbf{p}}=(\tilde{p}_1,\cdots,\tilde{p}_m)$，$\tilde{p}_j\geq 0$，$\sum_{j=1}^{m}\tilde{p}_j=1$，$j=1,\cdots,m$。用$\tilde{\mathbf{p}}$和$\mathbf{C}_i$的数量积（$\mathbf{C}_i$，$\tilde{\mathbf{p}}$）$=\tilde{c}_i=\sum_{j=1}^{m} c_{ij}\tilde{p}_j$表示所列举的费用。于是，原来的问题就变为 $\max\limits_{p}\max\limits_{X(p)}\{R(\mathbf{X}(\mathbf{p}))\mid C(\mathbf{X}(\mathbf{p}))\leq C^0\}$*.

式中 $C(\mathbf{X}(\mathbf{p}))=(c_1x_1(\mathbf{p}),\cdots,c_nx_n(\mathbf{p}))$；$C^0$——受第$j$个分量$C_j^0$约束的$m$维超立方数。在选择适当的$\tilde{\mathbf{p}}$时，用类似的方法可换算出最优解[10]。

总之，在某些约束下，可将条件最优化问题归结为不同费用的全部m个约束下，对于不同$\tilde{\mathbf{p}}$的一维条件最优化问题进行多次计算的一个程序。在计算时，会产生最优化单纯形$\mathbf{p}$的变化问题。如，选择方向和增量$\Delta\mathbf{p}$的规则。应用 $\tilde{R}(\tilde{\mathbf{p}})=\sum_{j=1}^{m} R_j(\mathbf{X}_j)\tilde{p}_j$
同样也可以解第二个问题。

用动态规划法解具有某些约束的最优化问题时，计算量太大。在[10]中列举的一维数不大的解计算量已经很大了。在[140]中所提出的一些启发性的算法都是以坐标下移法为基础的。下面的假设是以这些算法为基础的：函数$R(x_1, x_2, \cdots, x_n)$对自变量都是严格递增的，而每个函数$C(x_1, x_2, \cdots, x_n)$对每个自变量必须以线性函数为前提。在这种条件下，函数$R(\mathbf{X})$的极值实际上往往在点$\mathbf{X}^*$的邻域内，此点的邻域是$C_j(\mathbf{X}^*)=C_j^0$（$j=1, 2, \cdots, m$）。下面简要地介绍这些方法。

受约束控制的局部最优化法 选择约束因素中的一个因素变化而控制其它因素不变，这时的问题就同一个约束是一致的。当破坏了约束那怕只破坏了约束中的一个因素，则过程停止，并记忆$R(\mathbf{X}_j^*)$的值。这里的j表示第j个参数实现了最优化。对所有的$j=1, 2, \cdots, m$重复上述程序，然后，选择$\hat{R}=\max\limits_{1\leq j\leq m} R(\mathbf{X}_j^*)$值，该值便可作为最优化值使用。

这个方法仅仅在研究上述情况的个别场合才适用。应选择向量$\mathbf{p}$呈现$\tilde{\mathbf{p}}=(0, 0, \cdots, \tilde{\mathbf{p}}_j=1, \cdots, 0)$的形式，其中$j=1, 2, \cdots, m$。实际上，对于大多数实际问题来说，用这种方法得到的解是完全满意的。

应用这个方法可得出很重要的结论：如果在求解过程中按照j（$j=1, 2, \cdots, m$）个参数实行局部最优化时约束超过了C_j^0，而其余的约束不是临界的，那么所得到的解是最优解。

上述方法可以改进。当选择了约束中的一个条件后，按照该条件建立局部最优化过程，并找出破坏以前的其余约束；而且，如果有一些约束立刻被破坏，则从中选出约束，此约束的

* 式中下标X，p应为黑体，下同。

特征用最大相对误差表示，即用 $(C_j^{(N)}-C_j^0)/C_j^0$ 的最大值表示。可见，用这种方法确定的方向也是下一个运动方向。重复此程序，直到依次选择的运动方向不是以前遇到过的方向中的一个为止。不言而喻，每次都要确定变量 $R(\mathbf{X}^*)$。从所得的变量中选出的最大值就是所求的值。

当约束很多时，这个改进的方法仍然适用。因为它能很快地找到临界约束。

“反射屏”法 此法是由上述方法改进的。其要点可归纳为：如果在局部最优化过程中的某一步 N 破坏了参数 j 的条件 $C_j^{(N)}<C_j^0$，对于参数 j 来说是把“最重要”的部件从计算中剔除，直到形成参数贮备 C_j 为止。然后，选择出参数 j 作为局部最优化参数。这一局部最优化参数的更换过程，一直重复到满意的解为止。

临界对角线运动法 在该情况下选择这样的准则，它可能限制在 m 维平行六面体内沿对角线运动。为了更清楚地指出该方法的本质，我们有条件地引用一些比例系数，这些系数使约束的 m 维空间变为 m 维立方体的约束域。在过程的每一步中运动方向都应这样选择，在该方向上所有其余费用都应尽可能地接近 m 维立方体的对角线。

严格约束选择法 在这个方法中，在过程的每一步中都要补充规定约束的资金系数

$$K_j^{(N)}=(C_j^0-C_j^{(N)})/\Delta_j.$$

选择 Δ_j 的方法有三种：根据第 j 个部件的平均价格来选择 $\Delta_j=n^{-1}(c_{j1}+c_{j2}+\cdots+c_{jn})$；根据第 j 个部件价格的中值来选择 $\Delta_j=0.5(\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}c_{ji}+\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}c_{ji})$；根据与 Δ_j 意义相似的其它变量选择 Δ_j，即从某种意义上讲，如果不想构成最优程序节约资金，则系数 $K_j^{(N)}$ 表示该资金耗尽前过程的平均步数。在系数 $K_j^{(N)}$ 最小的方向上，选择 Δ_j 使得在第 $(N+1)$ 步上实现参数的最优化。

§15.4 根据系统的试验数据确定最优贮备量的方法

本节将根据发生故障所消耗的贮备部件的统计数据来研究有关最优贮备的几个问题[145，146]。这个方法可以避免主观臆断，尤其是摆脱关于部件故障的独立性，部件无故障工作时间分布模型、同一部件故障流递推性等假设。在分析最优贮备问题时，不得不涉及一般离散最优化问题。但是，因原始数据的随机性而导致解最优贮备对偶问题有很多困难。

令 κ 表示具有 n 个正整数分量的 n 维向量 $\mathbf{X}$ 的集合。此向量的各个分量分别代表一种部件的贮备数。将任意 n 维随机过程 $\nu(t)\in\kappa$ $(t\in[0,\infty))$ 叫做消耗过程，该过程的全部观察值的分量都是非递减的。令每一 $\mathbf{X}\in\kappa$ 对应着系统的一个参数 θ_X，θ_X 是可积随机变量。令函数 $\Phi(\mathbf{X})=\Psi(\mathbf{X},M\theta_X)$ 表示贮备件数，这里 $\Psi(x,y)$ 是某一给定函数。

下面，研究泛函的一些形式。令 $\Psi(x,y)=y$。

$\theta_X=\xi_X$ 表示系统故障前工作时间；$M\theta_X$ 表示系统的平均无故障工作时间；

$\theta_X=I\{\xi_X>t_0\}$，式中 $I\{A\}$ 表示集合 A 的数量化特征量；t_0 表示常数；

$\Phi(\mathbf{X})$ 表示系统到时刻 t 前无故障工作概率。

不要求随机变量 θ_X 及其均值 $M\theta_X$ 是已知的。$M\theta_X$ 是利用消耗过程的数据估计出来的。令 $s\subset\kappa$ 表示给定允许值 $\mathbf{X}$ 的集合，例如，根据贮备总费用的限制确定 s。

$$s=\{\mathbf{X}:\sum_{1\leqslant i\leqslant n}c_ix_i\leqslant c_0\}, \tag{15.9}$$

依方程

$$\Phi(X^0)=\max_x\{\Phi(X)|X\in s\}\tag{15.10}$$

求出向量$X^0\in s$的最优精确解（但不是必须的）。也可依近似最优解的方程

$$\Phi(X_*)=\max_x\{\widehat{\Phi}(X)|X\in s\}\tag{15.11}$$

求出向量$X^*\in s$的近似解代替精确解。式中$\widehat{\Phi}(X)$是函数$\Phi(X)$的估计，它决定于备件消耗过程$\nu(t)$的观察值。假设在试验结束前，不知道消耗过程$\nu(t)$的观察值，停止试验的时刻仅仅决定于消耗过程$\nu(t)$过去的性状。

关于马尔科夫过程停止时刻τ叫做停止规则，或试验方案。现在来研究各种停止规则：

$\tau=t_0$，式中t_0——常数；

$\tau=\tau_1$，式中τ_1——消耗过程$\nu(t)$从给定集合$B\subset r$离开的时间；B —单调集合。即因为$X\in B$，$Y\in r$和$Y\leqslant X$，所以$Y\in B$。由集合r构成的不等式可理解为分量不等式。如果给出$x_i\geqslant y_i$ ($i=1, 2, \cdots, n$)，$X\geqslant Y$，则

$$\tau=\tau_2=\min(\tau_1, t_0)。$$

现在，令规则τ是给定的，且τ依概率1小于∞，且得出到时刻τ之前的n个观察值$\nu=(\nu^1, \nu^2, \cdots, \nu^n)$。如果对任何$X\in s$，在观察值空间里存在着可测函数$g_\tau(X, \nu)$，此函数依概率1满足

$$\lim_{\tau} g_n(X, \nu)=M\theta_X,\tag{15.12}$$

则称规则τ是充分的，尤其是如果存在可测函数$\varphi_X(\nu')$，则

$$M\varphi_X(\nu^1)=M\theta_X,\ X\in s。\tag{15.13}$$

在这种情形下，实际上可以认为

$$g_\tau(X, \nu)=r^{-1}\sum_{i\leq r}\varphi_X(\nu^i),\tag{15.14}$$

依强大数定理可以证明（15.12）的正确性。

假设用τ_X表示过程$\nu(t)$与X水平相交的时刻，即$\tau_X=\sup\{t: \nu(t)\leqslant X\}$。如果最优参数集合$s$是单调的，而且当系统工作到$t=\tau_X$时刻前的消耗过程用$\nu(t)$表示，则可简单地建立充分规则$\tau$。在这些假设中，当$B=s$时，规则$\tau_1$是充分规则。实际上，集合$\Omega_X$与集合所给出的参数$\theta_X$是等价的，其轨迹都是$\{\nu(t), t\leqslant\tau_X\}$；同时要指出，可以把$\theta_X$当作$\varphi_X$使用。

在所研究的问题中充分规则起着很重要的作用（集合s是单调的，见（15.9）式）。

1．如果$\theta_X=\xi_X$，那么到从集合s中退出之前τ_1是充分规则，且可以把$\xi_X=\tau_X$当作φ_X使用。

2．如果$\theta_X=I\{\xi_X>t_0\}$，则规则τ_2是充分规则。函数φ_X可以选择的形式为

$$\varphi_X(\nu')=\begin{cases}1, & \nu'\leqslant X;\\ 0, & \nu'>X.\end{cases}$$

若掌握了依充分规则得出的结果和在集合s上计算的导函数最大值（或者充分好的估计），则可求出方程（15.11）的解。因此，认为$\widehat{F}(X)=F[X, g_n(X, \nu)]$，并计算出

$$f_n=\sup\{\widehat{F}_n(X)|X\in s\}。$$

若集合s是有限集，且函数$F(X, Y)$对Y是连续的，则$\widehat{F}(X)$依概率1按$X\in S$一致收

敛于$F(\mathbf{X})$。于是，依概率1存在

$$\lim_{n\to\infty} f_n = \sup\{F(\mathbf{X}),\ \mathbf{X}\in s\}.$$

因而，也可以从（15.11）式的解中得到（15.10）解的估计。此外，显然，若函数$F(\mathbf{X})$在集合s上有唯一的极大值，则发生向量$\mathbf{X}$的极值收敛问题。

到时刻τ以前，随机消耗过程$\nu(t)$的轨迹可理解为就是上述观察值ν_i。若依（15.14）式解出g_τ，则很明显，在试验过程中只需测量决定函数$\varphi(\mathbf{X})$轨迹的某些参数$\nu=\{\nu(t),\ t\leqslant\tau\}$；另方面，函数$\varphi(\mathbf{X})$的解只决定了（15.13）式，所以还不是单值的，而且这一选择可能严重地影响估计$\widehat{F}(\mathbf{X})$的准确性。

对偶问题可归结为求下述函数的极小值问题。

$$C(\mathbf{X})=\sum_{i=1}^{n} c_i x_i\ ,\ \mathbf{X}\in\kappa. \tag{15.15}$$

在此约束下选择贮备量$\mathbf{X}$时，到时刻t_0前无故障工作的概率

$$P(\mathbf{X})\geqslant q. \tag{15.16}$$

式中泛函$P(\mathbf{X})$不是给定的，而是根据上述试验方案的统计结果估计的。可以把（15.15）和（15.16）式归结为在随机约束下求已知函数的极小值问题。

首先从最简单的情形开始研究。假设试验次数$N\to\infty$，研究更一般的公式代替（15.15）和（15.16）式。令有限集族$\{s_c,\ C\in[0,\infty)\}$是给定的，并满足下列条件：①若$c_2\geqslant c_1$，则$s_{c_1}\subset s_{c_2}$；②对于任意$\mathbf{X}\in\kappa$都可找到$C\in[0,\infty)$使$\mathbf{X}\in s_c$。集合

$$s_c=\{\mathbf{X}\in\kappa:\ \sum_{i=1}^{N} c_i n_i\leqslant C\} \tag{15.17}$$

可作为该集合族的例子。式中c_i——i表示第i个部件的价格。

令q表示到规定时刻t_0之前系统无故障工作概率。当数值C足够小时，选择的贮备件数$\mathbf{X}$应保证q的大小。这时，我们认为选择的贮备件数$\mathbf{X}$依概率1保证无故障工作概率。显然，在这个意义上最优数值C_q的表达式为

$$C_q=\min\{C:\max_{\mathbf{X}\in s_c} P(\mathbf{X})\geqslant q\},$$

而其对应的最优贮备件数$\mathbf{X}_0$由下式计算。

$$P(\mathbf{X}_0)=\max_{\mathbf{X}\in s_{C_q}} P(\mathbf{X}).$$

由于$P(\mathbf{X})$是未知的，因之用试验结果的估计代之。在所研究的准则下，到时刻t_0前的试验方案对任何集合$s\subset\kappa$都是充分的，因此，在这种情形下要利用它。假设到时刻t_0前，对系统的状态观察了N次，当发生故障时便立即更换。用$\mathbf{K}_i$表示第i次试验结束前所消耗的备件数向量，对于N次试验的向量用$\mathbf{K}=(\mathbf{K}_1,\ \cdots,\ \mathbf{K}_N)$表示。为了估计$P(\mathbf{X})$而引用下述统计量

$$\nu(\mathbf{X})=\nu(\mathbf{X},\ \mathbf{K})=N^{-1}\sum_{i=1}^{N} h_i(\mathbf{X},\ \mathbf{K}). \tag{15.18}$$

式中

$$h_i=\begin{cases}1\ ,\ \mathbf{K}_i\leqslant\mathbf{X};\\ 0\ ,\ \mathbf{K}_i>\mathbf{X}.\end{cases} \tag{15.19}$$

为了估计C_q而引用统计量

$$C_q^*=\min\{C:\max_{\mathbf{X}\in s_c}\nu(\mathbf{X})\geqslant q\}. \tag{15.20}$$

于是，满足下式的任何X都是最优贮备量X^*的估计。

$$\nu(X^*)=\max_{X^*\in C_q^*}\nu(X). \tag{15.21}$$

若集s_C满足（15.17）式，则由（15.21）确定的每一估计X^*（及其对应的值）都可从函数

$$W(X)=\sum_{i=1}^{n}c_i x_i \tag{15.22}$$

满足约束为$\nu(X)\geqslant q$的最小值里找到。

可以证明，若$N\to\infty$，则在一定意义上C_q^*同C_q一致[144]。若用有限次试验数据建立C_q^*时，则将C_q^*作为最终解就会破坏无故障工作概率等于q的保证规则。为了使用有限次试验数据估计C_q^*，同时保证概率q，必须使统计量（15.20）式变形。

应指出，试验结果是随机的和$\nu(X)>P(X)$的概率不等于零，所以在有限次试验中由$\nu(X)$决定的最优贮备数向量X_0的任何合理的估计Z_*不能保证依概率1满足不等式$P(Z_*)\geqslant q$。从另一方面看，在考虑向量Z_*随机性的同时，可以研究混合试验：为了获得估计值，而对贮备系统进行试验。于是，具有贮备Z_*的系统到时刻t_0前无故障工作概率是$M_P(Z_*)$。

假设最优贮备量X_0的估计值Z_*能保证系统无故障工作概率等于q，如果

$$P\{P(Z_*)\geqslant\gamma\}\geqslant\delta. \tag{15.23}$$

式中γ和δ满足

$$0<\delta,\ \gamma<1,\ \delta\gamma=q. \tag{15.24}$$

由条件（15.23）和（15.24）式可导出不等式$M_P(Z_*)\geqslant q$。这一事实说明了上述定义的正确性。问题在于：当$N\to\infty$时，根据有限次试验数据得到的最优贮备向量X_0近似估计Z_*，Z_*决定于过程$\nu(X)$、$X\in\kappa$]，且满足（15.23）式。在[144]中引用的算法有可能以最小费用通过有限次试验近似地估计出贮备件数，这是由于对于c_i某些过高的估计所决定的。

§15·5 贮备部件的最优接通问题

问题的提出 贮备部件的最优接通问题属于所谓动态贮备问题。它属于最优贮备与贮备部件控制理论之间的问题。在[192]中首先提出这一问题。然后，出版了一系列著作，它们分别叙述了这个问题的各种个别的论点。

问题的实质是：为了使系统保持必要的裕度，在规定的时刻内在系统中接入n个部件。须知，如果在开始的时刻全部部件都接通，便使全部部件从开始时刻起就消耗寿命；而如果过份地节省接通部件，又会使大多数贮备部件还处于正常状态下系统发生故障，因此引起工作中断。这些很明显的理由说明，必须有一个贮备部件的最优接通规则。

在进行严格地论证前，首先指出其重要特性：

1．**目标函数**。通常选择到时刻t前无故障工作概率，或平均无故障工作时间作为正常工作时间的目标函数。

2．**系统的结构**，通常在动态贮备问题中，研究具有一定贮备部件的系统（包括研究表决贮备，即系统是n中取m型的，当发生故障的部件数多于$n-m$个时，系统发生故障）。研究复杂系统（甚至是串联系统）可能引起很复杂的计算问题。

3．**接通贮备部件的特点** 可以研究贮备部件接通的“梯队”。除了第一梯队的部件是

原来的处于工作状态的部件；位于第二梯队的部件，同第一梯队相比处于非工作状态，而在接通后接替第一梯队的部件而处于工作状态，……为了叙述简便，假设贮备部件只有两个梯队：工作的和贮备的。贮备的同一般备用部件等效，它可以在按顺序接通时作为备件使用。

4. **贮备部件的使用特点**：在某一阶段接通负载的贮备部件能成功地工作到按顺序接通的时刻。这种情况有两种可能：系统在下一阶段利用它或不利用它。

5. **部件到故障时刻t前工作时间的分布**。对于考虑剩余寿命分布来说，原则上可将探讨的问题归结为动态规划问题。但是，只有在指数分布时才能成功地得到计算程序，从计算量、记忆和使用的观点来看，此程序是比较合理的。

6. **控制参数**。所谓控制参数是指接通贮备部件的时刻和数量。个别的提法有：对固定的接通时刻只是选择接通的部件数；反之，事先给出在这个或那个阶段上有多少部件应当接通；最后，可提出同时选择的问题：接通的时刻和接通的部件数。

7. **控制模型**。在动态贮备问题中有两种主要模型：主观规则（程序接通）——在时刻$t=0$就确定了接通的时刻和每次接通的部件数；动态规则——根据本次接通的时刻和数量确定下次接通的时刻和数量。换句话说，解动态控制问题可归结为具有新开始时刻的主观贮备控制问题的多次解（按接通数计算的解）。

无正常贮备部件供给下一阶段的动态程序贮备　为了获得在这种情形下的简单解，我们把问题限制在这类动态贮备问题。

如果系统有n个贮备部件，规定在N个时刻$t_0,t_1,\cdots,t_{N-1}$接通工作状态，而且$t_k=k\Delta$，$\Delta=\tau/N$，则$\max\limits_x\{\prod\limits_{i=0}^{N-1}r(x_i,\Delta)\mid\sum\limits_{i=0}^{N-1}x_i=n\}$的最优解是$x_i=x^0=]n/N[$。这里$t_i\in[0,\tau]$ $(i=0,1,\cdots,N-1)$；$]z[$是z的整数部分；$r(x_i,\Delta)$是在第$(i+1)$区间$[t_i,t_{i+1}]$内有x_i个部件的无故障工作概率（x_i是在该区间开始时能工作的部件数，包括正在工作的部件和贮备部件）。其余$\nu=n-Nx^0$个部件在每一区间只接通一次。

类似的是，若允许在时刻t_i进行第i次接通n个部件中的x_i个部件，则方程$\max\limits_x\{\prod\limits_{i=0}^{N-1}r(x_i,\Delta_i)\mid\sum\limits_{i=0}^{N-1}x_i=n,\ \sum\limits_{i=0}^{N-1}\Delta_i=\tau\}$（式中$\Delta_i=t_{i+1}-t_i$，$i=0,\cdots,N-1$）的解可从下列简单方程的解中得到。

$$\ln r(x_i,\Delta_i)=c\Delta_i,\quad \sum_{i=0}^{N-1}x_i=n;\quad \sum_{i=0}^{N-1}\Delta_i=\tau.$$

式中c——常数。未知解$\mathbf{t}=(t_0,\cdots,t_{N-1})$可很容易地用递推法求出。

最后，对于选择$\mathbf{X}=(x_0,\cdots,x_{N-1})$和$\mathbf{t}=(t_0,\cdots,t_{N-1})$的解的问题可归结为下列递推方程

$$R_k(n_k,\tau_k)=\max_{t_k}\max_{x_k} r(x_k,\Delta_k)R_{k+1}(n_{k+1},\tau_{k+1}).$$

式中

$$n_{k+1}=n_k-x_k;\quad \tau_{k+1}=\tau_k-\Delta_k;\quad \mathbf{t}_k=(t_k,\cdots,t_{N-1});\quad \mathbf{X}_k=(x_k,\cdots,x_{N-1}),$$

$$k=0,\cdots,N-1;\quad n_0=n;\quad \tau_0=\tau;\quad R_{N-1}(n_1,\tau_1)=r(n_1,\tau_1).$$

不难指出，当$n_N=1$时，$x_i=1$，问题的解满足条件$x_i=x^0$和$\Delta_i=\Delta^0$ $(i=0,1,\cdots,N-1)$，且通过简单的检验方法便可得到条件

$$\max_x(T,\tau)^{-1}=\ln P(x^0,T/\nu)$$

式中$z=]n/x^0[$，$]z[$表示z的整数部分

对于最大无故障工作时间和$t_{i+1}-t_i=\Delta^0$（$i=0,1,\cdots,N-1$）来说，可从下式中解出x_k

$$T_k(n_k)=\max_{1\leqslant x_k\leqslant n_k} r(x_k,\Delta^0)[\Delta^0+T_{k-1}(n_k-x_k)]。\tag{15.25}$$

可以指出，解满足条件

$$x_k\geqslant x_{k+1}。\tag{15.26}$$

这就有可能利用下述的树状图在n步内求出（15.25）式的解。假定$n=1$。显然，在第一步上只有一个部件；当$n=2$时，在接通时刻有两种方法接通：（2,0）或（1,1）。下面计算数值

$$T(2,0)=\Delta r(2,\Delta),T(1,1)=r(1,\Delta)[\Delta+\Delta r(1,\Delta)]$$
$$=\Delta r(1,\Delta)[1+r(1,\Delta)],$$

并从这些数中选出最大的，其次，沿此解的树枝前进，从泛函最大值点上向上发展分枝。即，从结点（2,0）可向结点（3,0）和（2,1）过渡。而从结点（1,1）也可能向结点（2,1）和（1,1,1,）过渡。随后，继续进行分叉过程，而且结点的字典编号法与条件（15.26）式相对应。在过程的第n步到达树的顶点，该点便是树的解。

现在来研究问题的提法。当给定x_i时，需找到接通时刻t_i。条件（15.26）式的解与上述提法中的解是一致的，都是$x_i=x^0$（$i=0,1,\cdots,N-1$），$\Delta_i<\Delta_{i+1}$（由于数值的连续性会有严格的不等式）。在一般提法中，根据以下关系可以得到近似解。令Δ_0^0表示方程

$$T_N(n)=\max_{0\leqslant\Delta_0} r(x_0,\Delta_0)[\Delta_0+T_{N-1}(n-x_0)]$$

的解。于是，因为$T_N(z)\geqslant T_{N-1}(z)$，所以

$$T_N(n)<r(x_0,\Delta^0)(\Delta_0^0+T_N(n))$$

或者
$$T_N(n)<\Delta_0^0 r(x_0,\Delta_0^0)[1-r(x_0,\Delta_0^0)]^{-1}。\tag{15.27}$$

然后，可以写成

$$T_N(n)<\Delta_0^* r(x_0,\Delta_0^*)[1-r(x_0,\Delta_0^*)]^{-1}。\tag{15.28}$$

式中Δ_0^*——使不等式右端等于最大值的数，如同t的解可从方程

$$\frac{dr(x_0,t)}{dt}=\frac{-r(x_0,t)}{t(1+r(x_0,t))}$$

中得到一样。很遗憾，要估计解的误差是很困难的。这是因为方程给出了另一"粗糙"的近似解。可以用心观察，当全部Δ_i相等时，$x_i=x^0$（$i=0,1,\cdots,N-1$）。

对于一般提法的递推方程的形式为

$$T_N(n)=\max_{0\leqslant x_0\leqslant n}\ \max_{0\leqslant\Delta_0\leqslant\infty} r(x_0,\Delta_0)[\Delta_0+T_{N-1}(n-x_0)]。$$

与上述情形能得出近似解一样，这个问题也能得到近似解。从方程（15.28）中可以求出离散解x_0和Δ_0，它们能使（15.28）式右端取最大值。

有正常部件供给下一阶段的动态贮备　为了在固定的接通时刻$t_i=k\Delta$上选择接通数x_k而提出了近似解的程序，这对减小计算量很重要，只有当部件无故障工作时间服从指数分布时，下面的所有程序才是正确的。

在N次接通下，对于给定接通时刻$t_k=k\Delta$（$k=0,\cdots,N-1$）无故障工作概率最优化的递

推关系为

$$R_N(n+\xi_0,\tau)=\max_{0\leqslant x_0\leqslant n}\sum_{\xi_1=1}^{x_0+\xi_0} p_{\xi_1}(x_0+\xi_0)R_{N-1}(n-x_0+\xi_1,\tau-\Delta)$$
$$=\max_{0\leqslant x_0\leqslant n} M_{\xi_1}R_{N-1}(n-x_0+\xi_1,\tau-\Delta).$$

式中 $p_{\xi_1}(x_0+\xi_0)$——在时刻$t_0=0$后的时间Δ内，从$x_0+\xi_0$个部件中接通ξ_1个部件的概率（须指出$\xi_0=0$），这里和以下用ξ_k表示二项分布随机变量，ξ_k与ξ_{k-1}、x_k的关系如下：

$$p_{\xi_k}(x_{k-1}+\xi_{k-1})=C_{x_{k-1}+\xi_{k-1}}^{\xi_k}r^{\xi_k}q^{x_{k-1}+\xi_{k-1}-\xi_k}.$$

式中$r=1-q=e^{-\lambda\Delta}$；λ——部件的故障率（假定在$\xi_k=0$时，$R_{N-k}=0$）。

用动态规划法解最优化的正问题很困难，因此提出简化措施。我们注意到函数$R_N(n,\tau)$对N和n是有界上升增函数，而对τ是下凸减函数，而且$R_N(n,\tau)-R_N(n,\tau+\delta)$对$\tau$递减，$R_N(n+\delta,\tau)-R_N(n,\tau)$对$N$递减。于是，可写成不等式

$$\tilde{R}_N(n+M\xi_0,\tau)\leqslant\max_{0\leqslant x_0\leqslant n}\tilde{R}_{N-1}(n-x_0+M\xi_1,\tau-\Delta).$$

式中$M\xi_1=(x_0+\xi_0)r$。将后一递推关系的不等式改为等式，用之求解很简单。因此，利用函数$R_N(n+\xi,\tau)$的性质可得出

$$\tilde{x}_0\approx\left[\frac{n}{1+Nq}\right]+1.$$

考虑到真实的x^0不小于$\tilde{x}^0$，故此解可作为初始近似解。

下面引入动态规划最优解性质（假设），目前尚无严格的证明。令$x_0,x_1,\cdots,x_{N-1}$表示在固定时刻接通的部件数。于是，最优解具有以下性质（假设1）：

若$\sum_{1\leqslant i\leqslant N}x_i>\sum_{1\leqslant i\leqslant N}x_i'$，则$\sum_{1\leqslant i\leqslant k}x_i\geqslant\sum_{1\leqslant i\leqslant k}x_i'$，对所有$k<N$。用限制变量$x_k$的范围的方法，可使计算量大大缩小。用坐标下移法可求出数值解。

我们来研究方程

$$R_N(Nx^0,\tau)=\max_{t}\sum_{\xi_1=1}^{x_0+\xi_0}p_{\xi_1}(x_0+\xi_0,\Delta_0)R_{N-1}[(N-1)x_0+\xi_1,\tau-\Delta_0]$$
$$=\max M_{\xi_1}R_{N-1}[(N-1)x_0+\xi_1,\tau-\Delta_0].$$

式中x^0——在N个接通时刻的每一时刻所接通的部件数，当给定x_k和ξ_{k-1}时，随机变量ξ_k服从二项分布，而$\xi_0=0$。问题的解具有以下性质（假设2）：

（1）$\Delta_k\geqslant\Delta_{k+1}$；（2）$\Delta_k^2<\Delta_{k-1}\Delta_{k+1}$。

式中 $\Delta_k=t_{k+1}-t_k$ $(k=0,\cdots,N-1)$。

一般，以上述两个性质作为求解的根据，可用下式

$$R_N(n+\xi_0,\tau)=\max_{\leqslant\Delta_1}\max_{x\leqslant n}\sum_{\xi_1=1}^{x_0+\xi_0}p_{\xi_1}(x_0+\xi_0,\Delta_0)R_{N-1}(n-x_0+\xi_0+\xi_1,\tau-\Delta_0)$$

选择接通时刻和每次接通的部件数

也可将问题解的性质表示为以下假设（假设3）：

（1）$x_0\geqslant2$；（2）$x_k=1$，$k\geqslant1$；（3）$\Delta_k\geqslant\Delta_{k+1}$；（4）$\Delta_k^2<\Delta_{k-1}\Delta_{k+1}$，$k=1,\cdots,N$。

可用两个部件验证性质（1）。可以肯定地指出，对于任一t和t都存在

$$1-(1-e^{-\lambda t})^2>\max_{0\le t_1\le t}\exp(-\lambda t_1)\{1-[1-\exp(-\lambda(t-t_1))]^2\},$$

不难证明，此不等式对每一$0\le t\le t$都成立。对于$n>2$，根据函数R的性质可以证明$x_0>1$。对于近似解和后两个性质，可以在递推关系下将原泛函变为具有数学期望的变量ξ_i的泛函。

现在，研究无故障工作时间的最大值问题。对于N次接通来说，控制在时刻$t_k=k\Delta$接通的部件数的递推关系为

$$T_N(n+\xi_0)=\max_{0\le x_0\le n}\sum_{\xi_1=0}^{x_0+\xi_0}p_{\xi_1}(x_0+\xi_0,\Delta)[\Delta+T_{N-1}(n-x_0+\xi_0+\xi_1)]$$

$$=\max_{0\le x_0\le n}\left\{\sum_{\xi_1=0}^{x_0+\xi_0}p_{\xi_1}(x_0+\xi_0,\Delta,T_{N-1}(n-x_0+\xi_0+\xi_1)+(1-q^{x_0+\xi_0})\Delta\right\}$$

$$=\max_{0\le x_0\le n}\{M_{\xi_1}T_{N-1}(n-x_0+\xi_0+\xi_1)+(1-q^{x_0+\xi_0})\Delta\}.$$

式中$M\xi$——ξ的数学期望。显然，$T_0(m)=\lambda^{-1}\sum_{1\le i\le m}i^{-1}$，即在第$i$次接通后（若工作到此时刻尚无故障）剩下的部件是在工作状态下的一部分贮备。在这种情形下，也可用下述不等式求近似解

$$T_N(n+\xi_0)<\max_{0\le x_0\le n}\{(1-q^{x_0+\xi_0})\Delta+T_{N-1}(n-x_0+\xi_0+M\xi_1)\}.$$

如同解类似问题一样，建议应用假设1求解。

在控制接通时刻，递推关系具有以下形式

$$T_N(x^0N+\xi_0)=\max_{0\le\Delta_0}\sum_{\xi_1=0}^{x_0+\xi_0}p_{\xi_1}(x_0+\xi_0,\Delta_0)[\Delta_0+T_{N-1}((N-1)x_0+\xi_0+\xi_1)]$$

$$=\max_{0\le\Delta_0}\{\Delta_0(1-q_0^{x_0+\xi_0})+\sum_{\xi_1=0}^{x_0+\xi_0}p_{\xi_1}(x_0+\xi_0,\Delta_0)T_{N-1}[(N-1)x_0+\xi_0+\xi_1]\}$$

$$=\max_{0\le\Delta_0}\{\Delta_0(1-q^{x_0+\xi_0})+M_{\xi_1}T_{N-1}[(N-1)x_0+\xi_0+\xi_1]\}.$$

式中$q=q(\Delta_0)=1-\exp(-\lambda\Delta_0)$。为解这一问题，可用假设2。

对于求平均无故障工作时间最大值的问题，可归结为求控制接通时刻问题，或求控制接通部件数的问题。它具有以下递推关系：

$$T_N(n+\xi_0)=\max_{0\le\Delta_0}\max_{0\le x_0\le n}\sum_{\xi_1=0}^{x_0+\xi_0}p_{\xi_1}(x_0+\xi_0,\Delta_0)[\Delta_0+T_{N-1}(n-x_0+\xi_0+\xi_1)].$$

式中$\xi_0=0$。解此方程可用假设3。当$n=2$时，也可用条件$1.5\lambda^{-1}>\max_{0\le t_1<\infty}\exp(-\lambda t_1)$ $(t_1+1.5\lambda^{-1})$验算。

尽管已考虑到所研究的泛函对N是单调的，但关于泛函R和T这两类问题的最优接通次数N的选择问题，仍然可用上述方法逐一地选择N的可能值来求解。须知，N受变量n的约束（可能是补充约束，如接通时刻只能从一定集合中选择而且接通次数比n大）。从一般

设想未存，应在接通次数 $A = n - 1$ 时达到最优效果（考虑到 $x_0=2$）。

根据状态视情接通备用部件　对所研究的系统，在工作开始后，根据系统的状态接通备用部件的问题可用方程表示为

$$R(n+\xi_0,\tau)=\max_{0\leqslant x_0\leqslant n+\xi_0}\ \max_{0\leqslant \Delta_0<\infty} M_{\xi_1} R(n-x_0+\xi_0+\xi_1,\ \tau-\Delta_0);$$

$$T(n+\xi_0)=\max_{0\leqslant x_0\leqslant n+\xi_0}\ \max_{0\leqslant \Delta_0<\infty}\{M_{\xi_1}T(n-x_0+\xi_0+\xi_1)+\Delta_0(1-q_0^{x_0+\xi_0})\}.$$

用自变量均值的泛函代替泛函的均值后，再考虑它们的性质，便可求出这两个问题解的递推关系为

$$\tilde{R}(n+M\xi_0,\tau)=\max_{0\leqslant x_0\leqslant n+M\xi_0}\ \max_{0\leqslant \Delta_0<\infty}\tilde{R}(n-x_0+M\xi_0+M\xi_1,\ \tau-\Delta_0),$$

$$\tilde{T}(n+M\xi_0)=\max_{0\leqslant x_0\leqslant n+M\xi_0}\ \max_{0\leqslant \Delta_0<\infty}\{\Delta_0(1-q_0^{x_0+M\xi_0})+\tilde{T}(n-x_0+M\xi_0+M\xi_1)\}.$$

用上述近似法也可分析这些问题。应用上述类似方法，在演算过程可以应用关于解的性质的假设。

§15·6　贮备部件的定时转接模型

问题的提出　本节研究在每一时刻只有一个部件处于工作位置，而且具有 n 个贮备部件的系统。部件的无故障工作时间的分布是任意的，一般是互不相同的。当部件处于工作位置期间，由于要保证无故障工作概率，因此有必要更换部件。假定转换是瞬时完成的，并且是完全可靠的。

在工作过程中，系统中每一部件接通在工作位置上的机会只有一次。在这种情形下，便产生了两个问题：每一贮备部件被接通的顺序和接通的时刻。为了简便，将前者叫做接通程序规则；将后者叫做作业接通规则[216]。

把在规定的时间内无故障工作概率和平均无故障工作时间作为可靠性特征量。须知，贮备部件按程序接通的情形接近于动态贮备问题，或接近最优预防性定期维修问题。其次，我们将研究无故障工作概率分布的两个模型：故障率递增的分布（ВФИ）和故障率递减的分布（УФИ）。

在规定时间内无故障工作概率的最大值　首先研究相同部件的情形。对于由 n 个相同部件组成的系统，其无故障工作概率可写成如下的递推表达式：

$$P_n(t_0)=\max_{0\leqslant x_1\leqslant t_0} r(x_1)P_{n-1}(t_0-x_1). \qquad (15.29)$$

不难指出，根据此方程可以求出下列模型之解。

故障率递增的分布（ВФИ—分布）的解

$$x_1=x_2=\cdots=x_n=\frac{t_0}{n};$$

$$P_n(t_0)=[r(t_0/n)]^n.$$

式中 x_i —— 处于工作位置的第 i 个部件工作时间

故障率递减的分布（УФИ—分布）的解

$$x_1=t_0, x_2=\cdots=x_n=0; \quad P_n(t_0)=r(t_0).$$

由此解很容易得到与（15.29）式等效的解

$$\Lambda_n(t_0)=\min_{0<x_1<t_0}\{\widetilde{\lambda}_1(x_1)+\Lambda_{n-1}(t_0-x_1)\}. \tag{15.30}$$

式中 $\Lambda_n(t_0)=\ln P(t_0)=\sum_{i=1}^{n}\ln r_i(x_i)$；$\widetilde{\lambda}_i(x_i)=\ln r_i(x_i)=\int_0^{x_i}\lambda_i(x)\mathrm{d}x$。

$\lambda_i(x)$——第i个部件处于工作位置的故障率（对于УФИ—分布，故障率是严格递减的）。

其次，研究不同部件的情形，这时表达式变得复杂了，下面对某些特殊情形进行具体的研究。

1．将（15.30）式的解变为条件

$$\lambda_1(x_1)=\cdots=\lambda_n(x_n). \tag{15.31}$$

式中x_i——最优解。即$\sum_{i=1}^{n}x_i=t_0$。根据故障率函数$\lambda_i(t)$的图象可以简单地求出（15.30）式的近似解。

2．在这种情形下，把问题归结为确定应该接通的部件序号（计算过程的形式与相同部件的情形一样。于是，$x_1=t_0$，$x_2=\cdots=x_n=0$。令j表示在时刻t_0前接通在工作位置上的部件序号，根据方程$\widetilde{\lambda}_j(t_0)=\min_{1\leqslant i\leqslant n}\widetilde{\lambda}_i(t_0)$可解出$j$。

平均无故障工作时间的最大值见[216]。

§15·7 周期性地补充贮备部件的控制问题

研究贮备系统的主要课题是研究在时刻t贮备部件数$z(t)$的控制模型问题。贮备数$z(t)$随贮备部件的消耗而减少，而随贮备部件的补充而增多。部件的消耗过程（需要流）是随机过程，它决定于系统的故障流，而补充流决定于定货策略和定货到达的规则[125]。

当给定上述条件时，则贮备部件数$z(t)$就变为完全确定的某一随机过程模型了。分析该随机模型的问题就是贮备部件的控制模型问题[125～127，152]。这里感兴趣的问题是贮备部件消耗完了的时间分布（或求不间断满足需要流的概率）、贮备部件数的分布及其均值，以及提供贮备部件的定货频率等。

最突出的问题是选择最优控制策略所依据的准则。在此准则下，一方面，力图不造成过份的贮备；另一方面，力图及时满足需要，不允许供不应求；最后，力图减少定货频率。在数学分析中应用了几个费用概念。如，罚款函数f表示$z(t)=z$（$z>0$）的费用密度函数，它决定于保持一定水平的贮备量的欠额或决定于需要量的欠额。又如，定货价格函数$C(n)$（$n>0$）表示一次定货量为n个部件的费用。如果它们都叫做费用，则它们决定于贮备部件的消耗速度和定货次数。沿贮备部件数$z(t)$的轨迹积分，并对时间求均值，便可得到最小化的有效的准则。

假设在时间ξ_i内到达的需要流是一个部件，各ξ_i是具有均值$Q<\infty$的独立同分布$F(x)$的随机变量。贮备部件数$z(t)$随需要流的到达和满足而减小，当减少到某一水平$m\geqslant0$（m叫做定货点）的时刻就是需要提供n个部件的定货时刻，该批定货经过时间τ到达，τ是具有均值

$M\tau$ 和分布函数$G(x)$的随机变量。当定货到达后，又可能出现贮备部件的消耗量比定货量还多，致使贮备部件数$z(t)$下降到零(贮备被破坏了)。在这种情形下，需要量变成了定货量，且只有当定货到达后才能恢复对需要流的满足。从定货到达的时刻到需要流按顺序到达的时刻之间的时间x的分布函数为$F(x)$。可见，贮备部件用完了的时刻，就是需要流中断了的时刻。

在工作中，凡是系统发生故障都可看作是这种中断的实例。如果系统中没有贮备部件，那么任何部件失效都会使系统工作中断，在中断期间不会发生新故障（即没有新维修要求到达）。还有另一种近似模型：假设贮备部件已经耗尽，尽管还有需要流继续到达，但只能等待而不能满足。因此造成亏欠。须知，当需要流是泊松流时，则需要流中断模型也是泊松流。

这里只研究 $n>m$ 的情形。显然，当一批定货到达的时刻，贮备部件数$z(t)$不小于定货点m。当随着需要量增加使贮备部件数$z(t)$减少到定货点m的时刻，再提出n个部件的定货，该批定货经过时间 τ 到达，τ 与τ_i是独立同分布的等等。

显然，$z(t)$ 是随机过程，而且是再生过程。$z(t)=m$的时刻是再生点，$\{\xi_i\}$和$\{\tau_i\}$是需要流和定货流到达时刻。因此研究定货时刻是很容易的。

再生周期的长度 下面，研究随机变量θ——相邻两次定货时刻之间的时间：

$$\theta=\max(\tau,X_m)+\sum_{i=m+1}^{n}\xi_i. \tag{15.32}$$

式中 $X_m=\sum_{i=1}^{m}\xi_i$。实际上，只有在$z(t)=m$和定货到达的时刻才是再生周期的始点。若在定货到达之前有m个需要到达，即若 $\tau>X_m$，则可用 θ 表示 τ 与有 $n-m$个需要到达的时间之和。这些需要量使得 n 个贮备部件在时刻 τ 降低到 m 个。反之，若 $\tau\leqslant X_m$ 且未出现贮备部件耗尽，则 θ 就是到达 n 个需要的时间。

依公式 (15.32) 可求出θ 的分布。但是，我们只要求出其均值就足够用了。因为

$$P\{\max(\tau,X_m)\leqslant x\}=P\{\tau\leqslant x\}P\{X_m\leqslant x\}=G(x)F_m(x).$$

式中$F_m(x)$——$F(x)$的m重卷积，且

$$M\theta=\int_0^{\infty}[1-G(x)F_m(x)]dx+(n-m)a=na+\int_0^{\infty}\bar{G}(x)F_m(x)dx. \tag{15.33}$$

首次耗尽的时间 假设$z(t)$ 的再生点就是再生周期的始点，并令 η 是贮备部件首次耗尽的时间，于是

$$M\eta=pMX''_m+q[M\eta+MX'_m+(n-m)a]. \tag{15.34}$$

式中 $p=1-q=P\{X_m<\tau\}=\int_0^{\infty}G(x)dF_m(x)$表示在一个再生周期里发生贮备部件耗尽的概率；$MX'_m=M(X_m|X_m\leqslant\tau)$；$MX''_m=M(X_m|X_m>\tau)$。应用条件$pMX''_m+qMX'_m=ma$，以及 (15.34) 式可得到

$$M\eta=na/p-(n-m)a.$$

我们再引入随机变量η'——相邻两次贮备部件耗尽的时刻之间的时间。因为在此时间的始点$z(t)=n$，而到了再生点到达的需要量是$n-m$，所以$\eta'=\sum_{i=1}^{n-m}\xi_i+\eta$。由此得出$M\eta'=na/p$。

为研究 η 的大小，写出其拉普拉斯变换式

$$M\exp(-s\eta)=pM\exp(-sX''_m)+qM\exp[-s(\eta+X'_m+\sum_{i=m+1}^{n}\xi_i)].$$

应用η式分布可导出η的均值（15.34）式。引用记号

$$M\exp(-s\eta)=\varphi(s);\quad M\exp(-sX'_m)=f'_m(s);$$

$$M\exp(-sX''_m)=f''_m(s);\quad M\exp(s\xi)=f(s).$$

再应用$pf''_m(s)+qf'_m(s)=f^m(s)$，便可得到

$$\varphi(s)=\frac{pf''_m(s)}{1-f^n(s)+pf''_m(s)f^{n-m}(s)}. \tag{15.35}$$

当p小时，应用（15.35）式来研究η的渐近线的性质。实际上，用选择足够大的m来保证满足需要不中断。请注意，当p小时，η与η'无显著差别。

辅助定理15.2 若$M\xi^2<\infty$，则

$$P\{p\eta/na\geqslant t\}\to e^{-t},\quad p\to 0. \tag{15.36}$$

证明

$$M\exp\left(-s\frac{p}{na}\eta\right)=\varphi\left(\frac{ps}{na}\right)=\frac{pf''_m\left(\frac{ps}{na}\right)}{1-f^n\left(\frac{ps}{na}\right)+pf''_m\left(\frac{ps}{na}\right)f^{n-m}\left(\frac{ps}{na}\right)}.$$

首先求当$p\to 0$时上式右端的极限，根据条件$M\xi^2<\infty$可得出结论：$f^n(s)$在零点存在二阶导数，所以依泰勒公式可得

$$f^n\left(\frac{ps}{na}\right)=1-na\frac{ps}{na}+o(p).$$

此外

$$f''_m\left(\frac{ps}{na}\right)=1+o(p),\quad f^{n-m}\left(\frac{ps}{na}\right)=1+o(p).$$

可见

$$\varphi\left(\frac{ps}{na}\right)=\frac{p[1+o(p)]}{p(1+s)+o(p)}\to\frac{1}{1+s},\quad 当p\to 0.$$

因为$1/(1+s)$是指数分布的拉普拉斯变换，于是（15.36）证毕。

因此，当p小时，可利用近似公式

$$R(t)=P\{\eta>t\}\approx\exp(-pt/na). \tag{15.37}$$

若用消耗贮备部件的有中断的模型来描述系统的工作，则可靠度$R(t)$可理解为在区间$[0,t)$上系统不中断工作的概率，或贮备部件能满足系统需要的概率。正如（15.37）式所指出的那样，在p小时，供应中断流可看作是泊松流。

标准停工系数 所谓标准停工系数（或贮备量等于零期间的时间）是指在一个再生周期中平均停工时间ω_0与周期的平均时间之比：$k_0=M\omega_0/M\tau$，且$\omega_0=(\tau-X_m)_+=\min(0,\tau-X_m)$，则

$$M\omega_0=\int_0^\infty P\{(\tau-X_m)_+>u\}du=\int_0^\infty\int_u^\infty F_m(t-u)dG(t)du.$$

令$v=t-u$，并改变积分次序，便得出

$$M\omega_0=\int_0^\infty \bar{G}(v)F_m(v)dv.$$

最后
$$p_0=\int_0^\infty \bar{G}(v)F_m(v)\mathrm{d}v\left(na+\int_0^\infty \bar{G}(v)F_m(v)\mathrm{d}v\right)^{-1}.$$

在标准停工条件下的平均贮备量 显然，

$$\lim_{t\to\infty} \mathrm{M}z(t)=\lim_{T\to\infty}\mathrm{M}\frac{1}{T}\int_0^T z(t)\mathrm{d}t=\lim_{T\to\infty}\frac{\mathrm{M}W(T)}{T}.$$

式中 $W(T)=\int_0^T z(t)\mathrm{d}t$——累积过程。所以

$$\lim_{t\to\infty}\mathrm{M}z(t)=\mathrm{M}W(\theta)/\mathrm{M}(\theta).$$

式中规定$t=0$是贮备量$z(t)$的再生点。

在一个再生周期中研究贮备量$z(t)$的变化可得到

$$W(\theta)=\sum_{i=1}^{n}(m+1-i)\xi_i+n(X_m-\tau)+\sum_{i=n+1}^{\nu}(n+m_0+1-i)\xi_i.$$

经不复杂的演变后可得到

$$\mathrm{M}W(\theta)=0.5an(n+2m+1)-n\left(\mathrm{M}\tau-\int_0^\infty \bar{G}(x)F_m(x)\mathrm{d}x\right).$$

因此
$$\lim_{t\to\infty}\mathrm{M}z(t)=\frac{0.5an(n+2m+1)-n(\mathrm{M}\tau-b_m)}{na+b_m}.$$

式中
$$b_m=\int_0^\infty \bar{G}(x)F_m(x)\mathrm{d}x. \tag{15.38}$$

标准费用强度 令单位时间内消耗的费用为f_0，保存贮备部件费用的线性强度为$f_i=f_1$，（$i\geqslant0$），定货的费用为$C(n)$。于是，可将总费用的标准强度作为控制参数m和n的函数
$$V(m,n)=f_0p_0+f_1\lim_{t\to\infty}\mathrm{M}z(t)+C(n)/\mathrm{M}(\theta);$$

$$V(m,n)=\frac{f_0b_m+f_1n[0.5a(n+2m+1)-\mathrm{M}\tau+b_m]+C(n)}{na+b_m}. \tag{15.39}$$

式中b_m由（15.38）式求出。

最佳参数的计算 在$m,n\geqslant0$的条件下，依（15.39）式可解出最佳参数。但是，还应补充一个条件$n\geqslant m$。因为（15.39）式是在$n\geqslant m$的条件下导出的。可见，应在整数栅格的扇形上找出函数的最小值。下面的辅助定理对解决这一问题是很重要的。

辅助定理15.1 对于任意分布$F(x)$和$G(x)$，序列b_m既不增也不凸。

由$F_{m+1}(x)\leqslant F_m(x)$知，对任意$x$和$b_m$是不增的。$b_m$的凸性表示其二阶导数是非负的。即，当全部$m\geqslant0$时，不等式$\Delta^{(2)}b_m=b_{m+2}+b_m-2b_{m+1}\geqslant0$成立。对此结论可用微分法直接验证之。

下面，研究函数$V(m,n)$。首先，固定n变m，函数（15.39）是具有单峰值的函数，因此其极值是最小值。然后，固定m变n，为了简便，我们只研究约束为$C(0)=0$，$C(n)=c_0+nc_1$，$n>0$的情形。[125]指出

$$n^*(m)=\max\left\{m,\left]\frac{1}{4}+\frac{2c_1}{f_1a}+\frac{2b_m}{a}\left(-m-\frac{b_m}{na}+\frac{f_0}{f_1}-\frac{1}{2}+\frac{\mathrm{M}\tau}{a}-\frac{c_1}{f_1a}\right)^{1/2}-\frac{b_m}{a}-\frac{1}{2}\right[\right\}. \tag{15.40}$$

式中$]x[$——x的整数部分

总之，在固定m时，利用计算求出$V(m,n)$的极小值。在固定n时，求解就比较复杂。但是，由于(15.39)式是单峰值的，故可用求一维函数极值的任何方法求其极值。求极值的主要困难决定于用(15.38)式求b_m的难度。在特殊情形下，可求出b_m的简单表达式。如，令τ=常数，而$F(x)=1-e^{-\lambda x}$，即它是泊松流。于是

$$b_m=\tau d(m-1,\lambda\tau)-(m/\lambda)d(m,\lambda\tau)。$$

式中　$d(m,\lambda\tau)=1-\sum_{j=0}^{m}\frac{(\lambda\tau)^j}{j!}e^{-\lambda\tau}$——泊松分布函数。当交货时间服从指数分布时，可得到b_m的简单表达式，即$G(x)=1-e^{-\mu x}$。实际上，

$$b_m=\int_0^\infty e^{-\mu x}F_m(x)dx=\frac{1}{\mu}(\widetilde{F}(\mu))^m。$$

式中　$\widetilde{F}(\mu)$——在点μ的拉普拉斯—斯蒂尔吉斯变换。

首先，为归纳已得到的结果，引入下列定义。

定义1　若

$$V(m^*,n^*)=\min_n V(m^*,n),V(m^*,n^*)=\min_m V(m,n^*),$$

则称二维整数栅格的点(m^*,n^*)为函数$V(m,n)$的标准点。

定义2　若在$m',n'\pm1$，和m'、$n'+1$的六个点上函数$V(m,n)$达到极小值，则用二维整数栅格确定的函数$V(m,n)$在点(m',n')上达到局部最小值。此局部最小值的定义与连续函数局部最小值的定义相同。点(m',n')与其余点的关系是邻域关系。若不在全部栅格上确定$V(m,n)$而是在某一局部确定，则位于点(m',n')附近的点都可理解为属于函数$V(m,n)$的定义域。

由定义2知，如果函数$V(m,n)$在点(m',n')的邻域的取值不小于$V(m',n')$，则点(m',n')是函数$V(m,n)$的局部最小值点。由于函数$V(m,n)$是单峰值的，所以最小值点总是标准点。但是，标准值点并不总是局部最小值点。

函数(15.39)的最优化可分为下列几个阶段：

1．寻找标准点。首先在函数$V(m,n)$的定义域内寻找。从某一点开始，如从点(0,0)开始寻找$\min_n(0,n)$，由(15.40)式确定最小值点n_1。其次，固定$n=n_1$，用坐标下移法寻找最小值$\min_m V(m,n_1)$。设$V(m,n)$在$m=m_1$时达到最小值。从点(m_1,n_1)开始沿n轴下移，依(15.40)式寻找达到$\min V(m,n)$的点n_2。最后，从点(m_1,n_2)开始沿m轴下移等等，直到找到标准点为止。这就是第一阶段结束的标准。若某一步在点(m^*,n^*)上结束，则在下一阶段重新引用该点，于是(m^*,n^*)就是标准点。

2．检查标准点是否是函数$V(m,n)$的局部最小值的线性标准点。为此，在各点(m^*+1,n^*+1)、(m^*+1,n^*-1)、(m^*-1,n^*+1)、(m^*-1,n^*-1)计算$V(m,n)$之值。若(m^*,n^*)小于这些值，则点(m^*,n^*)就是函数$V(m,n)$的局部最小值点。即使在以上各点中，有一点使$V(m,n)<V(m^*,n^*)$，也应取该点作为起点，并且重复第一阶段。若$f_1>0$，则在最后一步上出现局部最小值。若$f_1=f$，则由(15.39)式可明显地看出$\lim_{n\to\infty}V(m,n)=0$，因此最优的$n\to\infty$。

在[?]中列举并详细地讨论了具有相同部件贮备系统的其它控制问题。

第十六章 故障的最优发现和寻找

§16.1 概 述

一般技术系统是由大量配套部件组成的，而且其结构也是相当复杂的。因此，产生了诊断其状态的问题。在迅速发现、寻找故障的一系列问题中，最重要的是保证系统具有高可靠性和可用性[20]。要提高可靠性特征量，如可用度，就要提高无故障工作时间，或减少维修时间。但二者相比，往往用后者更容易实现。而维修时间的主要部分则是发现和寻找失效部件的时间。

系统的故障不仅在其工作过程中会发生，而且在贮存或待命状态下也会发生。当系统不能按其功能或不能按其工作情况判断其状态的情况下，就应在开始工作前对某些部件甚至是对整个系统的工作能力进行检查（如果可能的话），其目的是预先发现故障部件和防止有故障的系统进入工作状态。例如，飞机在起飞前要检查导航设备、无线电设备、自动控制系统、液压系统等的功能是否正常，以及发动机的工作能力。如果在检查中发现故障，就要禁止飞机起飞，或指定别的飞机起飞，这是利用更换进行贮备的典型例子[143]。

在进行维修或定期工作时，也会发生同样的问题。在这种情况下，正确地组织寻找故障部件的过程是很重要的。即，选择检查对象的参数和确定检查程序，由此判断各部件的工作能力，进而判断与此部件有关的子系统的工作能力。

技术诊断学已有相当长的历史。首批著作有参考文献[172，186，191，195，215]，它们提出了寻找故障部件的费用最小的检查方法。参考文献[172，195]阐述了利用所谓信息准则建立寻找故障部件的启发式程序。在参考文献[186，191，215]中提出了功能退化的纯数学问题的精确解。例如，在“最优诊断方法”[315]中提出了在可能对部件进行逐个检查的条件下，检查程序的编号规则。这个问题，实际上可归结为Беллман问题。

对于更一般的情形，曾企图用动态规划法及其分支与边界法寻找问题的解。在选择枝叉方向时，根据查询表理论确定边界[107，108]。在参考文献[20，91，109—114，138，148]中有许多新方法。

目前，苏联已发表了一系列技术诊断论文。下述主要内容是根据Г·С·Пащковский提供的资料编写的。

§16.2 监控对象模型和寻找故障的方法

假设以n个部件组成的系统为技术监控对象（以下用OK表示之），在发现和寻找故障部件（组合件、模块、元件）的问题中，从故障部位的信息必须充分的观点来看，OK应足够大。各部件的总体组成集合Ω。

假设OK的每一部件只能处于两种可能状态之一，即处于正常状态或故障状态。假设部件处于这两种可能状态的概率分别为p_i和$q_i=1-p_i$（$i=1，\cdots，n$）是已知的。

为了检查OK的工作能力以及寻找故障部件，可以检查参数 t_i ($i=1, \cdots, m$)。一般，允许检查许多互相关联的参数，各参数的额定值由有关部件子集的工作能力决定之。被检查的参数必须包括必要的输入信号、OK电路的传递信号（如，反馈信号）、检查一个或几个点的输出等。应用每一检查结果（以下称做检测）只能得到两种可能的结论："合格"——如果子集 Ω_i 的全部部件都有工作能力；"不合格"——如果子集 Ω_i 中只要有一个故障部件，每次检查都要有一定费用 τ，此费用可以是时间，也可以是所用设备仪器的费用等。对各检测的总体用矩阵 $T=\|t_{ij}\|$ ($i=1, \cdots, m$, $j=1, \cdots, n$) 表示之。矩阵 T 的行对应着参数的检查结果，即检测；而列对应着检查集合 Ω 的部件的费用。

$$t_{ij}=\begin{cases}1, & j\in\Omega_i,\\ 0, & j\notin\Omega_i, \quad i=1, \cdots, m, \; j=1, \cdots, n.\end{cases}$$

因此，列向量 $\tau=\{\tau_1, \cdots, \tau_m\}$——每一检测所需的费用。我们假定：对完成检查任务来说，现有的检测必须是足够用的（今后将在具体问题中使足够用的概念具体化）。

对于最优检查问题的数学描述，除给出模型（矩阵）外，还必须给出检查过程本身的模型，即对OK可能状态的预测、确定检查程序、结束程序的规则，以及最优化准则等。

检查程序的模型可依不同特征分类。

依故障的定位深度可将检查程序模型分为对OK工作能力的检查和对故障部件的检查。前者的任务是检查整个OK是否有工作能力，后者是检查OK中每一部件的工作能力，直到诊断出故障部件为止。

依检查程序的实施方法可分为序贯检查和综合检查。序贯检查程序是根据某一条件安排检查内容，由这一次检查结果安排下次检查内容，或结束检查。检查结果的总体也可以是检查的总费用，在执行检查程序的每一具体场合下，总费用决定于OK的真实状态，即它是随机变量。综合检查程序是根据事先确定的被检查参数的全部检查结果来判断OK的真实状态。显然，在这种情况下，检查次序是无意义的。因为所有的检查都是分析结果之前进行的，而总费用决定于检查程序。

评价检查程序的标准是两条最优化准则：以最小费用实施程序，以最大费用中的最小费用实施程序。一般，以实施程序的最小总费用作为判断综合程序的最优化准则。而综合程序的实施决定于所选择的检查结果（以下称作检测）总体，或者决定于检测数（当每个检测的费用相等时）。

在主观地确定OK的可能状态时，一般采用两条假设：在OK内的故障部件数不超过一个；在OK内的故障是某一子系统（几个部件的组件）。当出现某些部件故障时，它属于上述两者之间的情形，这里不单独研究。因为，如果把故障部件的子集当作OK的可能状态看待的话，那么它属于第一条假设的情形。

如果允许任意子系统的部件同时发生故障，则可将寻找故障部件的条件检测程序同修复故障部件相结合，但也可看作是未修复的。在第一种情形下，在OK完全修复之前进行检查；在第二种情形下，检查一直进行到确定了各部件的状态为止，亦即，一直到确定了OK的状态为止。

依在检查后尚未被检查的剩余部件集合可将对OK的检查程序分为完全检查和不完全检查。在完全检查中，可把一所有部件的检查过程的最优化问题看作是无约束条件的，在不完全

检查中，就必须考虑选择部件总体的问题，所以可看作是有约束条件的。例如，在总费用不超过最大值的条件下，根据OK处于正常状态的最大经验概率确定部件总体；或者，相反的问题。这时，只有在用综合检查程序检查故障时，才能唯一地确定总费用，当用条件程序检查故障时，要考虑总费用的平均值和最大值。

依检测设备的可靠性水平可将对OK的检查程序分为可信设备检查和不可信设备检查。对于后者，选择最优检测总体及其程序的问题是很复杂的。因为需要分析检查结果，而这些结果又是不独立的。

依判断OK状态的信息的充分程度，可将对OK的诊断问题分为完全信息和不完全信息的条件下判断OK真实状态的问题。

§16.3 监控对象只有一个故障部件的状态监控和诊断

问题的提出 假设由n个部件组成的OK中只有一个故障部件，并且已知检测矩阵T和每个部件的故障概率q_i $(i=1, \cdots, n)$。从检测矩阵T中找出寻找故障部件所必须的部件子集，并确定检查故障部件的检查程序（条件程序），以便使寻找故障部件的程序的平均总费用最小。

利用任一部件i的检测t_i可将集合Ω分为两个子集Ω_i和$\overline{\Omega}_i$。通常，假设OK中只有一个故障部件，它必处于两子集之一：当检测t_i"合格"时，则故障部件不在子集Ω_i中；当检测t_i"不合格"时，则故障部件在子集$\overline{\Omega}_i$中。

假设子集Ω_i和$\overline{\Omega}_i$的容量大于1，即$|\Omega_i|>1$，$|\overline{\Omega}_i|>1$。为了进一步确定故障部件在哪一子集中，显然可利用检测$t_k\in T$来检查子集Ω_i和$\overline{\Omega}_i$的工作能力。这种检测t_k叫做这些子集的重要检测。

若$\Omega_k\cap\Omega_i\neq\Omega_i$，且$\Omega_k\cap\Omega_i\neq\phi$，则称$t_k$是子集$\Omega_i$的重要检测。令$T_i$表示$\Omega_i$的重要检测表，且象$\Omega_k\cap\Omega_i=\Omega_e\cap\Omega_i$一样，若$t_k\in T_i$，$t_e\in T_i$，则将此表中的每一对检测中较小的留下，而去掉另一个。当两者的费用相等时，则从表中随便去掉一个，直到弄清了子集Ω_i中所有部件的工作能力并找出故障部件为止。因此，表T_i可用矩阵表示之。矩阵T_i的列表示子集Ω_i中的部件，矩阵T_i的行表示一组检测。将行上的任意检测重新编号（下面用上标表示这些编号），我们假定矩阵的每一行对应着一组检测$t^k_{(i)}$ $(k=1, 2, \cdots, m_i)$。当费用$\tau^k_{(i)}=\tau_e$时，则用检测$t^k_{(i)}$检查子集$\Omega^k_{(i)}=\Omega_e\cap\Omega_i$的工作能力，无括号的下标表示在初始矩阵$T$中定位故障的检测（为了简化起见，它可以省略）。也可以类似地编制$\overline{\Omega}_i$的检测矩阵。

如果在OK中只有一个故障部件，那么为了在部件级上确定故障，显然存在着矩阵T的充分性问题：矩阵T的所有列都应成对地分开。显然，矩阵T的充分性也保证了按上述规则表示的任何矩阵T_i的充分性。因此，没有必要对这样的矩阵逐个地检查其充分性。

下面，研究检查上述模型概率特性的计算方法。因为假设在OK中已知只有一个故障部件，所以正好是第i个部件故障的概率为

$$\tilde{Q}_i = q_i \prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} p_k \Big(\sum_{l=1}^{n} q_l \prod_{\substack{k=1\\k\neq l}}^{n} p_k \Big)^{-1} = \hat{q}_i \Big(\sum_{l=1}^{n} \hat{q}_l \Big)^{-1}. \tag{16.1}$$

式中$\hat{q}_i = q_i / p_i$。当检查某子集Ω_i（或$\bar{\Omega}_i$）的工作能力时，检测结果为“不合格”的概率为

$$Q_i = \sum_{j\in\Omega_i}\tilde{Q}_j \quad (\text{或} Q_{\bar{i}} = \sum_{j\in\bar{\Omega}_i}\tilde{Q}_j)。 \tag{16.2}$$

如果通过检测确认故障部件在子集Ω_i中，且故障部件也在子集Ω_s（$\Omega_s\subset\Omega_i$，或$\Omega_s\subset\bar{\Omega}_i$）中的概率为

$$Q_{s(i)} = Q_s Q_i^{-1} \text{或} Q_{s(\bar{i})} = Q_s Q_{\bar{i}}^{-1}。 \tag{16.3}$$

假设故障部件在子集Ω_i中，用某种方式依次划分子集Ω_i可定位故障部件，称这种划分方式为检查程序（策略），记作$\sigma(\Omega_i)$。如果用检测$t^k_{(i)}\subset T$进行第一次划分，那么很明显$\sigma(\Omega_i)$可用下式表示：

$$\sigma(\Omega_i) = [t^k_{(i)}, \sigma(\Omega^k_{(i)}), \sigma(\bar{\Omega}^k_{(i)})]。 \tag{16.4}$$

而执行程序$\sigma(\Omega_i)$的费用的数学期望，用下式计算。

$$C[\sigma(\Omega_i)] = \tau^k_{(i)} + Q^k_{(i)}C[\sigma(\Omega^k_{(i)})] + (1-Q^k_{(i)})C[\sigma(\bar{\Omega}^k_{(i)})]。 \tag{16.5}$$

这里的计算是从两个部件开始的。对于这些子集，定位故障部件的费用等于检查的费用，它使两部件子集划分为单部件子集。

动态规划法 寻找故障部件最优策略（程序）的计算问题，可用动态规划法。这个方法的实质是系统地研究子集$\Omega_i\subset\Omega$，并且以最优划分策略寻找故障部件的检测$t^k_{(i)}\in T_i$。所谓最优划分策略是指以最小总费用对集合Ω的依次划分一直到故障部件是单部件子集为止。

如果以$\sigma^*(\Omega_i)$表示某最优划分策略，并且在子集Ω_i上发现了故障部件，那么用$C[\sigma^*(\Omega_i)]$表示执行最优划分策略的费用。对于由2，3，…个部件组成的子集来说，建立$\sigma^*(\Omega_i)$的方法就是确定$\sigma^*(\Omega_i)$的递推过程。在此过程的每一步上，根据执行策略的最小费用的检测$t^k_{(i)}\subset T_i$来划分子集。执行最优划分策略费用的表达式为

$$C[\sigma^*(\Omega_i)] = \min_{m\geq k\geq 1}\{\tau^k_{(i)} + Q^k_{(i)}C[\sigma^*(\Omega^k_{(i)})] + (1-Q^k_{(i)})C[\sigma^*(\bar{\Omega}^k_{(i)})]\}。 \tag{16.6}$$

为了建立寻找故障部件的最优检测策略，不仅要测量，而且还要记忆这些检测。这种情形同全面检测相比，检测范围小得多。因为使用这种检测能将故障部件定位在某一子集上，而全面检查时，必须对所有部件逐个地进行检查。然而，不难看出，这种建立最优检查策略的方法会导致计算量特别大。问题是在实际检查时，矩阵的行数没有大大地超过部件数n。由于在此子集Ω_i中，依次应用检测$t_i\subset T$可以缩小寻找故障的范围，而且故障部件数远远小于检测数，因而从建立最优检测策略的观点看，上述计算大部分是多余的。

排列法 在对部件进行检查的情况下，可得到以最小的平均费用寻找故障部件的最简单的编号规则。所谓排列法是指从任一编号的检测开始，使相邻的两检测成对地换位，在有限步内得到预先给定的实施程序，其中包括最优程序。如果根据使用的检测程序对最后的整数泛函有影响，便可找到比较相邻的两检测的准则（在这种情形下，准则是寻找故障部件的平均时间）；然后，再找出每一检测的一定准则；最后，根据这一准则的单调变化，对所有部件编号。因此，问题可用分析法解之。

对于所讨论的情形来说（正如已指出的那样，实际上其性质是充分退化的），排列法是非

常有效的。

对于检测的编号，可将（16.5）式的整数泛函记作

$$C[\sigma(\Omega)]=\tau_1+q_1C[\sigma(e_1)]+p_1C[\sigma(\Omega\setminus e_1)].\qquad(16.7)$$

式中$C[\sigma(e_1)]=0$，由于e_1是单部件子集，不需对它再检查；而$C[\sigma(\Omega\setminus e_1)]=\tau_2+C[\sigma(\Omega\setminus(e_1\vee e_2))]$，由于剩余部件的集合$\{\Omega\setminus e_1\}$中只对个别部件进行检查，所以我们只能按规定的编号检查2号部件等 最后，可将（16.7）式变为

$$C=\tau_1+p_1(\tau_2+p_2(\tau_3+p_3(\tau_4+\cdots))).\qquad(16.8)$$

上式也可用编号k和$k+1$写成

$$C=a+b(\tau_k+p_k(\tau_{k+1}+p_{k+1}d)).\qquad(16.9)$$

式中a、b和d与这些编号无关

现在，假定改变对第k和$k+1$号部件的检查次序，于是整数泛函（16.9）变为

$$C^*=a+b(\tau_{k+1}+p_{k+1}(\tau_k+p_kd)).\qquad(16.10)$$

当$C<C^*$时，则总是先检查第k号部件，而后检查第$k+1$号部件，由（16.9）和（16.10）式不难看出后一条件与条件$\tau_k/q_k<\tau_{k+1}/q_{k+1}$是等价的。

由此可见，根据比值的增加，可知对系统中部件的编号与最优检查是相当的。在[215]中介绍了此方法。

递推法 用递推法比用动态规划法更有效，而且还有许多其它优点。这个方法将在下面以及其它最优寻找问题中应用。这里仅阐述其思路。我们把在集合Ω中寻找故障部件的过程看作是依次划分集合Ω的多步过程：根据树状图的每一分枝进行划分，直到得到单部件子集为止，在每次划分时都要按最优划分策略划分。最后，再回到初始的划分上。

根据在第一步利用检测t_1的结果将集合Ω划分为子集Ω_1和$\overline{\Omega}_1$。设$|\Omega_1|>1$。于是，记忆$\overline{\Omega}_1$，在子集Ω_1上建立寻找故障部件的检测矩阵T_1^1，并且确定适合划分Ω_1的检测$t^1_{u(1)}$（下标u是检测$t^1_{u(1)}$在初始矩阵T中的编号）。由于利用这一检测的结果而得到子集$\Omega^1_{u(1)}=\Omega_u\cap\Omega_1$和$\overline{\Omega}^1_{u(1)}=\overline{\Omega}_u\cap\Omega_1$。如果$|\Omega^1_{u(1)}|>1$，那么记忆$\overline{\Omega}^1_{u(1)}$，并继续划分直到获得单部件子集为止。我们用子集$\Omega^1_{u(1)}$的重要检测$t^1_{u(1)}$的矩阵$T_{u(1)}$表示子集$\overline{\Omega}^1_{u(1)}$。

为了明显起见，假设利用检测$t^1_{u(1)}\in t_{u(1)}$划分子集$\Omega^1_{u(1)}$，并得出单部件子集$\Omega^1_{u(1)}$和$\overline{\overline{\Omega}}{}^1_{u(1)}$，当有两种检查结果时，可以不必进一步检查就能确定故障部件。下面，我们来确定最优策略$\sigma^{1*}(\Omega^1_{u(1)})$，以及执行该策略的平均费用$C[\sigma^{1*}(\Omega^1_{u(1)})]$（原文为$C[\sigma^{1*}(\Omega_{u(1)})$—译注)。这里称$\sigma^{1*}(\Omega^1_{u(1)})$为条件最优策略。利用检测$t^1_{u(1)}$来划分子集$\Omega^1_{u(1)}$，并且以最优策略$\sigma^{1*}(\Omega^1_{u(1)})$寻找故障部件（在上述的情况下，可以不这样定位，但不能改变推论的实质）。

将两个部件的子集划分为单部件子集，只有两种可能的方法：第一种方法，对两个部件分别进行检查；第二种方法（如果存在这种划分的话），利用检测$t^2_{u(1)}\in t_{u(1)}$可类似地确定条件最优策略$\sigma^{2*}(\Omega^1_{u(1)})$及平均费用$C[\sigma^{2*}(\Omega^1_{u(1)})]$（原文为$C[\sigma^{2*}(\Omega_{u(1)})]$——译注）。比较这两种条件最优策略的费用之后，选择最优策略，显然，它也是子集$\Omega^1_{u(1)}$的最优策略$\sigma^*(\Omega^1_{u(1)})$。如果在矩阵$T_{u(1)}$中不存在第二个检测$t^2_{u(1)}$，则$\sigma^*(\Omega^1_{u(1)})=\sigma^{1*}(\Omega^1_{u(1)})$。

我们回到初始划分级上并研究子集$\overline{\Omega}_1$。如果$|\overline{\Omega}_1|=1$，不需进一步检查就能定位故障部件。如果$|\overline{\Omega}_1|>1$，则用上述方法划分子集，在每一划分级上建立条件最优策略，求出最优策略后，再回到初始划分上。

假设由于应用此方法的结果求出最优策略$\sigma^*(\overline{\Omega}_1)$和执行该策略的平均费用$C[\sigma^*(\overline{\Omega}_1)]$。于是，便得到检查集合$\Omega_1$最好的条件最优策略$\sigma^*(\Omega_1)$，以及检查子集$\Omega_1$的划分的条件最优策略$\sigma^{k*}(\Omega_1)$ $(k=1, \cdots, m)$。比较执行每一条件最优策略的平均费用后，选出最优的策略，便是在子集Ω_1上寻找故障的最优策略，并且回到上一次划分水平上重新研究。重复地描述树状图的所有分枝，便可求出检查OK的最优策略$\sigma^*(\Omega)$。下面，从另外一些情形描述这一过程。

为了对集合Ω进行初始划分，显然可以利用矩阵T的全部检测。我们研究这些矩阵中的第一个矩阵。请注意，假定矩阵的全部编号是任意的。应用该矩阵将集合Ω划分为Ω_1和$\overline{\Omega}_1$。假设进一步寻找故障部件的最优策略是已知的，即最优策略$\sigma^*(\Omega_1)$（当t_1“不合格”时）和$\sigma^*(\overline{\Omega_1})$（当$t_1$“合格”时）是已知的。于是，确定条件最优策略$\sigma_1^*(\Omega)=[t_1, \sigma^*(\Omega_1), \sigma^*(\overline{\Omega}_1)]$，并根据（16.5）式求出执行最优策略的平均费用。其次，类似地确定条件最优策略$\sigma_2^*(\Omega)$和执行该策略的平均费用。比较执行这两个策略的平均费用后，选择并记忆平均费用较小的策略。显然，没有必要记忆费用大的策略。

假设建立子集Ω_i的最优策略所需的策略$\sigma^*(\Omega_i)$是未知的。于是，从已找出的条件最优策略中选择最优策略，并进一步研究子集Ω_i的划分。将重要检测编成矩阵T_i，并以上述方法类似地用每个检测$t^k_i \in T_i$确定条件最优策略$\sigma^{k*}(\Omega_i)=[t^k_i, \sigma^*(\Omega^k_{i1}), \sigma^*(\overline{\Omega}^k_{i1})]$ $(k=1, \cdots, m)$；然后，确定最优的$\sigma^*(\Omega_i)$，使$C[\sigma^*(\Omega_i)]=\min_{1\leqslant k\leqslant m} C[\sigma^{k*}(\Omega_i)]$。由于以前的计算被中断是因为没有$\sigma^*(\Omega_i)$的缘故，那么现在的计算就能继续到底。

应用检测结果将集合Ω划分为子集，并对子集重复使用这种方法，便可建立最优策略。

下限估计　由于应用建立最优策略的启发式程序能提高方法的功效（很接近最优策略），使在建立最优策略之前就能淘汰无前途的策略（显然不是最优策略）。

如上所述，为了确定最优策略$\sigma^*(\Omega_i)$而建立的条件——最优策略$\sigma^{k*}(\Omega_i)$ $(k=1, 2, \cdots, m)$是根据矩阵T_i的检测t^k_i的编号产生的。试图确定这样的编号方法是有益的：若平均编号较小的条件——最优策略比后面的策略更好，就能使淘汰简单化。如果尚未找到条件——最优策略，但已找到费用下限估计的简单方法，那么就淘汰已建立的策略。因为有下限的比没有下限的价值大。

假设在确定最优策略$\sigma^*(\Omega_i)$的某一阶段上，已经建立了$k-1$个条件最优策略，并从中选出平均费用$C[\sigma^{v*}(\Omega_i)]$最好的条件最优策略$\sigma^{v*}(\Omega_i)$。令Γ^k_{i}为条件最优策略$\sigma^{k*}(\Omega_i)$的费用下限。于是，很明显，如果$C[\sigma^{v*}(\Omega_i)]\leqslant\Gamma^k_i$，则条件最优策略$\sigma^{k*}(\Omega_i)$不可能比$\sigma^{v*}(\Omega_i)$更好。在这种情况下，策略$\sigma^{k*}(\Omega_i)$是没有前途的，可能没有建立就被淘汰了。

为了最有效地选择下限的计算和矩阵T_i的编号规则，就必须考虑具体系统的结构。这里，为了简便起见，选择非常明显（因此也是最粗糙）的规则。其中，对于把矩阵T变为矩阵T_i的检测编号，要保证列入矩阵T_i的检测价值不减小。为了确定Γ^k_i，利用（16.5）式

的基本结果：条件最优策略$\sigma^{**}(\Omega_i)$的价值不小于检测$t^{1}_{(i)}$的价值。t^{1}_{i}是第一次划分集合Ω得到子集Ω_i的检测，亦即$F^{1}_{(i)}=\tau^{1}_{(i)}$。

正如分析问题所得到的结论那样，无论是研究集合Ω，还是研究任何一个子集，建立寻找故障部件最优策略的思想都不变。这是由于问题的递推结构是不变的。为了利用递推性减小计算量，就要对初始矩阵T的检测进行编号，但不减小被测子集的容量，即不减少矩阵的每一行的元素数。

最小最大化准则 在拟定技术系统的检查程序时，往往不考虑系统的可靠性数据。这是由于那时根本不知道这些数据。在这种情况下，用最小最大化准则拟定检查程序是适宜的。根据这一准则建立最优策略，该策略是在参与过程的随机变量出现最不利数值的条件下建立的（在这种情况下，故障部件是随机的）。在进行检查中，当根据最大多数而不是平均情况有必要限制最大费用时，也要利用最小最大化准则来保证统计的最优化。

在OK内只有一个故障部件的假设是可信的，并且利用检测矩阵T的检测程序建立寻找故障部件的条件策略，以便使执行条件策略的最大费用最小。

将寻找故障部件的检测矩阵T的检测程序再看作是逐次划分集合Ω的程序。那么，在子集Ω_i内寻找故障部件的策略$\sigma(\Omega_i)$的第一步就是利用检测$t^{1}_{(i)}\in T_i$（T_i按上述规则编制而成），或象（16.5）式那样拟定程序。执行这一策略的费用是随机变量，其最大值为

$$R[\sigma(\Omega_i)]=\tau^{1}_{(i)}+\max\{R[\sigma(\Omega^{1}_{(i)})];\ R[\sigma(\overline{\Omega}^{1}_{(i)})]\}. \qquad (16.11)$$

如果用上式已求出最大费用代替平均费用$C[\sigma(\Omega_i)]$的情形下，那么也可应用上述寻找故障部件统计最优的方法。

§16.4 对可修监控对象故障的序贯寻找

在许多实际情形中，很难以充分的理由证明监控对象OK中仅有一个故障部件的假设是正确的。本节所研究的检查问题是：假设没有关于OK状态的全部信息，且已故障部件可能在任意的子集中。同时，假设一旦发现任何部件故障，便立即用正常部件更换之

对于由n个部件组成的OK来说，假定根据给定的检测矩阵T能足以发现所有故障部件。如果发现故障部件，就立即以正常的更换之，并使OK恢复工作能力，修复过程以下述方式进行：先利用检测矩阵T的检测t_i对OK逐次划分寻找出故障部件，并用正常部件更换之；再对含故障部件的子集Ω_s（$|\Omega_s|\geqslant 1$）（原文为$|\Omega_s|=1$——译注）的所有部件的工作能力进行检查，其中也包括对更换的正常部件进行检查。若对Ω_s的检查的结果为“不合格”，就在该集上继续寻找故障部件，并以正常部件更换之，更换后还要检查子集Ω_s的工作能力；若检查结果为“合格”，再检查更小子集Ω_i（$\Omega_i\supset\Omega_s$）的工作能力，当发现故障部件时，立即修复Ω_i，此过程一直进行到OK完全修复为止。

为了简便起见，假设在开始检查之前就已知在OK中只有一个故障部件，并且可以对OK的工作能力进行全面检查。现在来研究建立修复程序的问题。此程序可将求修复过程的平均费用问题化为求最小值的问题。不难证明，更换部件的费用不影响修复程序的最优化，所

以假定更换费用等于零。

修复过程的第一步是利用检测t_i来划分集合Ω。假设划分的结果得到两个子集Ω_i和$\overline{\Omega}_i$。第二步，在子集Ω_i和$\overline{\Omega}_i$上继续寻找故障部件，为此就要利用对这两个子集的重要检测。$t_k \subset T$是子集$\Omega_i(\Omega_k \subset \Omega_i)$的重要检测。因为，如果不是这样，即$\Omega_k \cap \Omega_i \neq \Omega_k$，检测$t_k$"不合格"，则说明故障部件不在子集$\Omega_i$中。这些检测用矩阵$T_i$表示，形成矩阵的规则，同§16.3所讲的规则一致。对于进一步在$\overline{\Omega}_i$中寻找故障部件，初始矩阵T中的全部检测包含子集$\overline{\Omega}_i$的重要检测。

对于所研究的问题，尽管将矩阵T的各列成对地分开，但仍不能保证包含OK的修复矩阵具有充分性。在这种情况下，利用问题的递推结构可以编制矩阵的充分性特征。

我们把用检测t_i检查的子集Ω_i叫做被定位的子集。如果将故障部件换成正常部件，检测总体对检查子集Ω_i是充分的。于是，矩阵的充分性特征就是在集合Ω中至少有一个子集包含故障部件。这些子集中的任何一个都能把故障部件限制在一定范围内。仅由一个部件构成的集合可能例外（即，此部件不在任何子集上），可用消元法确定其状态。

根据上述列举的特征，在单部件子集上寻找故障部件是很容易的。而对两部件子集定位故障部件，只要对其中一个部件进行检测就足够了。对于三部件子集定位故障部件，必须对其中的两个部件进行检测。其余，依此类推。

实际上，可用下述方法检查矩阵T的充分性。首先，研究用矩阵T的第一个检测t_i（为方便起见，假定t_i是常数）检查一个以上的部件子集的工作能力，并且按上述规则编成重要检测矩阵T_i。如果矩阵不包括任何行，则在子集Ω_i上不能定位故障部件，此子集的任何部件故障是很难区分的。在这种情况下，或者用必要的方法补充矩阵T，或者对子集Ω_i的故障部件很难区分的性质进行改造，在决定这一部件的修复规则后，要将此子集的部件合并到另一个子集Ω_j中。如果矩阵T_i中行的元素数大于零，则观察元素数最小的行。假设该行对应的子集的可定位性不明显，那么编成对该子集的重要检测矩阵，并且再一次尝试这个重要检测矩阵的定位性。在继续再递推变换的同时，确定子集或其一部分是否具有可定位性。

现在，令$\Psi(\Omega_i)$[illegible]某可修子集Ω_i故障的逐次寻找策略。假设该策略的第一步利用检测$t^k_i \in T_i$，并且已知在子集Ω^k_i和$\overline{\Omega}^k_i$上继续应用修复策略$\Psi(\Omega^k_{i,i})$和$\Psi(\overline{\Omega}^k_{i,i})$。于是

$$\Psi(\Omega_i) = [t^k_i, \Psi(\Omega^k_i), \Psi(\overline{\Omega}^k_i)] \tag{16.12}$$

执行$\Psi(\Omega_i)$的费用是随机变量，其取值决定于OK的真实状态。可以指出，该随机变量的均值为

$$C[\Psi(\Omega_i)] = c^k_i + \tilde{q}^k_i C[\Psi(\Omega^k_{i,i})] + [illegible] + (1 - \tilde{q}^k_i) C[\Psi(\overline{\Omega}^k_{i,i})]。 \tag{16.13}$$

式中

$$\tilde{q}^k_i = (1 - \prod_{j \in \Omega^k_{i,i}} p_j)(1 - \prod_{j \in \Omega_i} p_j)^{-1} \tag{16.14}$$

——在子集Ω_i中发现故障的条件下，在子集$\Omega^k_{i,i}$上恰好有一个故障部件的经验概率。

在这种情况下，也可应用§16.3中的建立寻找故障部件最优策略的递推法。

如上所述，为了判断条件最优策略$\Psi(\Omega_i)$是否有前途，可以应用执行这些策略的费用下

限作为判据。在这种情况下，费用下界

$$\Gamma^k_{i,1} = \tau^k + \tau_{P(i)} \tilde{q}^k_i \quad . \tag{16.15}$$

上述方法可用之建立最小最大化维修策略。如果某策略$\Psi^k_{\Omega_i}$具有（16.12）的形式，执行该策略的最大费用为$R[\Psi^k(\Omega_i)] = \tau^k + \tau + C[\Psi(\Omega^k_i)] + R[\Psi(Q^k_i)]$，而在建立策略的过程中，将利用这个最大费用代替平均费用$C[\Psi(\Omega)]$

参考文献

1. **Алатырцев А. А.** Применение метода линейного программирования для решения задач теории надежности. — Стандартизация, 1963, № 5.
2. **Алексеев О. Г., Якушев В. И.** Комбинационный метод расчета оптимального резервирования. — Изв. вузов СССР. Приборостроение, 1964, т. 7, № 4.
3. **Багдонавичус В. Б.** Статистическая проверка модели аддитивного накопления повреждений. — Теория вероятностей и ее применения, 1978, т. 23, № 2, с. 403—408.
4. **Багдонавичус В. Б.** Проверка гипотез и оценка параметров при ускоренных испытаниях. Канд. дис. Вильн. гос. ун-т. — Вильнюс, 1978.
5. **Барзилович Е. Ю.** Модели технического обслуживания сложных систем. — М.: Высшая школа, 1982.
6. **Барзилович Е. Ю., Воскобоев В. Ф.** Введение в теорию обслуживания авиационных систем по состоянию. — М.: Транспорт, 1981.
7. **Барзилович Е. Ю., Каштанов В. А.** Некоторые математические вопросы теории обслуживания сложных систем. — М.: Сов. радио, 1971.
8. **Барзилович Е. Ю., Каштанов В. А.** Организация обслуживания при ограниченной информации о надежности системы. — М.: Сов. радио, 1975.
9. **Барзилович Е. Ю., Каштанов В. А., Коваленко И. Н.** О минимаксных критериях в задачах надежности. — Изв. АН СССР. Техническая кибернетика, 1971, № 3, с. 87—98.
10. **Барлоу Р., Прошан Ф.** Математическая теория надежности. Пер. с англ./Под ред. Б. В. Гнеденко. — М.: Сов. радио, 1969.
11. **Беллман Р.** Динамическое программирование. Пер. с англ./Под ред. Н. Н. Воробьева. — М.: ИЛ, 1960.
12. **Беллман Р., Дрейфус С.** Прикладные задачи динамического программирования. Пер. с англ. Под ред. А. А. Первозванского. — М.: Наука, 1965.
13. **Беляев Ю. К.** Доверительные интервалы функций от многих неизвестных параметров. — ДАН СССР, 1966, т. 196, № 4, с. 755—758.
14. **Беляев Ю. К.** Об упрощенных методах построения доверительных границ для надежности систем по результатам испытаний компонент. — Изв. АН СССР. Техническая кибернетика, 1966, № 5, с. 96—101.
15. **Беляев Ю. К.** Вероятностные методы выборочного контроля. — М.: Наука, 1975.
16. **Беляев Ю. К.** Статистические методы в теории надежности. — М.: Знание, 1978.
17. **Беляев Ю. К.** Простые доверительные оценки квантилей стареющих распределений продолжительности безотказной работы. — Изв. АН СССР. Техническая кибернетика, 1981, № 1, с. 67—76.
18. **Беляев Ю. К., Дугина Т. Н., Чепурин Е. В.** Вычисление нижней доверительной границы для вероятности безотказной работы сложных систем. Ч. I. — Изв. АН СССР. Техническая кибернетика, 1967, № 2, с. 52—59.
19. **Беляев Ю. К., Дугина Т. Н., Чепурин Е. В.** Вычисление нижней доверительной границы для вероятности безотказной работы сложных систем. Ч. II. — Изв. АН СССР. Техническая кибернетика, 1967, № 3, с. 67—78.
20. **Беляев Ю. К., Ушаков И. А.** Математические модели для задач обнаружения и локализации неисправностей. — Кибернетику на службу коммунизму. — М.: Энергия, 1964, вып. 2, с. 158—178.
21. **Биргер И. А.** Техническая диагностика. — М.: Машиностроение, 1978.
22. **Благовещенский Ю. Н.** Аксиоматическая теория накопления усталостных повреждений. — Заводская лаборатория, 1969, № 10, с. 1204—1213.
23. **Большев Л. Н.** Асимптотически пирсоновские преобразования. — Теория вероятностей и ее применения, 1963, т. 8, № 2, с. 129—155.
24. **Большев Л. Н.** К вопросу о проверке «показательности». — Теория вероятностей и ее применения, 1966, т. 11, № 3, с. 542—544.
25. **Большев Л. Н., Логинов Э. А.** Интервальные оценки при наличии мешающих параметров. — Там же, № 1, с. 94—107.
26. **Большев Л. Н., Смирнов Н. В.** Таблицы математической статистики. — 2-е изд. — М.: ВЦ АН СССР, 1968.

27. Боровков А. А. Вероятностные процессы в теории массового обслуживания. — М.: Наука, 1972.
28. Боровков А. А. Теоремы непрерывности для многоканальных систем с отказами. — Теория вероятностей и ее применения, 1972, т. 17, № 3.
29. Бусленко Н. П. К теории сложных систем. — Изв. АН СССР. Техническая кибернетика, 1963, № 5.
30. Бусленко Н. П., Калашников В. В., Коваленко И. Н. Лекции по теории сложных систем. — М.: Сов. радио, 1973.
31. Вазов В. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Мир, 1968.
32. Ван дер Варден Б. Л. Математическая статистика: Пер. с нем./Под ред. Н. В. Смирнова. — М.: ИЛ, 1960.
33. Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. — М.: Наука, 1973.
34. Введение в техническую кибернетику/Г. Ф. Верзаков, Н. В. Киншт, В. И. Рабинович и др.; Под ред. К. Б. Карандеева. — М.: Энергия, 1968.
35. Висков О. В., Ширяев А. Н. Об управлениях, приводящих к оптимальным стационарным режимам. — Труды МИАН СССР, 1964, т. 71, с. 105–121.
36. Волконский В. Н., Розанов Ю. А. Некоторые предельные теоремы для случайных функций. — Теория вероятностей и ее применения, 1959, т. 4, № 2, с. 186—207.
37. Володось И. Ф. Об эффективности алгоритмов оптимизации надежности сложных систем. — Надежность и контроль качества, 1978, № 3.
38. Воскобоев В. Ф. К учету неполного восстановления при управлении состоянием технической системы. — Изв. АН СССР. Техническая кибернетика, 1971, № 4, с. 51—55.
39. Воскобоев В. Ф. Об оптимальном управлении состоянием технической системы при наличии ограничений. — В кн.: Основные вопросы теории и практики надежности. — М.: Сов. радио, 1975, с. 128—145.
40. Гадасин В. А., Ушаков И. А. Надежность сложных информационных управляющих систем. — М.: Сов. радио, 1975.
41. Гельфонд А. О. Исчисление конечных разностей. — М.: Наука, 1967.
42. Гихман И. И., Скороход А. В. Введение в теорию случайных процессов. — М.: Наука, 1965.
43. Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей. — 5-е изд. М.: Наука, 1969.
44. Гнеденко Б. В., Беляев Ю. К., Соловьев А. Д. Математические методы в теории надежности. — М.: Наука, 1965.
45. Гнеденко Б. В., Коваленко И. Н. Введение в теорию массового обслуживания. — М.: Наука, 1966.
46. Гнеденко Д. Б., Соловьев А. Д. Одна общая модель резервирования с восстановлением. — Изв. АН СССР. Техническая кибернетика, 1974, № 6.
47. Гнеденко Д. Б., Соловьев А. Д. Оценка надежности сложных восстанавливаемых систем. — Изв. АН СССР. Техническая кибернетика, 1975, № 3.
48. Голодников А. Н., Стойкова Л. С. Определение оптимального периода предупредительной замены на основе информации о математическом ожидании и дисперсии времени безотказной работы системы. — Изв. АН СССР. Кибернетика, 1978, № 3, с. 110—118.
49. Гумбель Э. Статистика экстремальных значений: Пер. с англ./Под ред. Д. М. Чибисова. — М.: Мир, 1965.
50. Демин В. К., Маламенко Ю. Е. Получение оценочных решений для задач оптимального резервирования. — Изв. АН СССР. Техническая кибернетика, 1974, № 1, с. 112–117.
51. Джевелл В. С. Управляемые полумарковские процессы. — Кибернетический сборник. Новая серия. — М.: Мир, 1967, вып. 4.
52. Диалоговая система моделирования сложных систем (Готовится к печати).
53. Дуб Дж. Л. Вероятностные процессы. Пер. с англ./Под ред. А. М. Яглома. — М.: ИЛ, 1956.
54. Закс Ш. Теория статистических выводов. Пер. с англ./Под ред. Ю. К. Беляева. — М.: Мир, 1975.
55. Ибрагимов И. А., Хасьминский Р. З. Асимптотическая теория оценивания. — М.: Наука, 1979.

59. Калашников В. В. Некоторые свойства кусочно-линейных марковских процессов. — Теория вероятностей и ее применения, 1975, т. 20, № 3.
60. Карибский В. В., Пархоменко П. П., Согомонян Е. С. Техническая диагностика объектов контроля. — М.: Энергия, 1967.
61. Карлин С. Основы теории случайных процессов: Пер. с англ./Под ред. И. Н. Коваленко. — М.: Мир, 1971.
62. Карташов Г. Д. О гипотезе Майнера и принципе Седякина. — Изв. АН СССР. Техническая кибернетика, 1970, № 6, с. 71—78.
63. Карташов Г. Д. Форсированные испытания при нестабильном процессе производства. — Изв. АН СССР. Техническая кибернетика, 1971, № 4, с. 84—90.
61. Карташов Г. Д. Основы теории форсированных испытаний. — М.: Знание, 1977.
62. Карташов Г. Д. Методы форсированных испытаний. — В кн.: В помощь слушателям семинара по надежности и прогрессивным методам контроля качества продукции. — М.: Знание, 1979, с. 56—99.
63. Карташов Г. Д., Перроте А. И. О принципе «наследственности» в теории надежности. — Изв. АН СССР. Техническая кибернетика, 1968, № 1.
64. Карштедт И. М., Коган Л. М. Задача оптимального резервирования с выбором вариантов исполнения. — Изв. АН СССР. Техническая кибернетика, 1971, № 2, с. 41—45.
65. Каштанов В. А. Об одном классе оптимальных дискретных управлений полумарковским процессом. — Некоторые теоретические и прикладные вопросы теории вероятностей МИЭМ. — М., 1975, вып. 44, с. 67—76.
66. Каштанов В. А. О минимаксных стратегиях при ограничениях на моменты распределений. — В кн.: Теория и практика надежности. — М.: Сов. радио, 1980, с. 143—154.
67. Кендалл М. Д., Стьюарт А. Теория распределений: Пер. с англ./Под ред. А. Н. Колмогорова. — М.: Наука, 1966.
68. Кендалл М. Д., Стьюарт А. Статистические выводы и связи: Пер. с англ./Под ред. А. Н. Колмогорова. — М.: Наука, 1973.
69. Климов Г. П. Стохастические системы массового обслуживания. — М.: Наука, 1966.
70. Коваленко И. Н. Некоторые вопросы теории надежности сложных систем. — Кибернетику на службу коммунизму. — М.: Энергия, 1964, вып. 2.
71. Коваленко И. Н. О некоторых классах сложных систем. Ч. I. — Изв. АН СССР. Техническая кибернетика, 1964, № 6.
72. Коваленко И. Н. О некоторых классах сложных систем. Ч. II. — Изв. АН СССР. Техническая кибернетика, 1965, №
73. Коваленко И. Н. О некоторых классах сложных систем. Ч. III. — Изв. АН СССР. Техническая кибернетика, 1965, № 3.
74. Коваленко И. Н. Асимптотический метод оценки надежности сложных технических систем. — В кн.: О надежности сложных технических систем. — М.: Сов. радио, 1966.
75. Коваленко И. Н. Исследования по анализу надежности сложных систем. — Киев: Наукова думка, 1975.
76. Коваленко И. Н. Анализ редких событий при оценке эффективности и надежности систем. — М.: Сов. радио, 1980.
77. Коваленко И. Н., Москатов Г. К., Барзилович Е. Ю. Полумарковские процессы в задачах проектирования систем управления летательными аппаратами. — М.: Машиностроение, 1973.
78. Кокс Д., Смит В. Теория восстановления: Пер. с англ./Под ред. Ю. К. Беляева. — М.: Сов. радио, 1967.
79. Кокс Д., Хинкли Д. Теоретическая статистика: Пер. с англ./Под ред. Ю. К. Беляева. — М.: Мир, 1978.
80. Конев В. В. Об оптимальности включения резервных элементов. — Изв. АН СССР. Техническая кибернетика, 1974, № 4, с. 77—83.
81. Королюк В. С., Турбин А. Ф. Полумарковские процессы и их приложения. — Киев: Наукова думка, 1976.
82. Копелевич Б. М. Профилактика дублированной системы. — Автоматика и вычислительная техника, 1969, № 5, с. 49—55.

83. **Кривуца В. Г.** Формализованная модель статистического моделирования сложных систем. — В кн.: Методы исследования операций и теории надежности в анализе систем/ИК АН УССР. — Киев, 1979, с. 3—11.

84. **Кривуца В. Г.** Пакет прикладных программ АМСС оперативного моделирования сложных систем. — РФАП, 1980, № 7658.

85. **Кривуца В. Г.** Об одном подходе к построению алгоритма статистического моделирования сложных систем. — В кн.: Теория сложных систем и методы их моделирования. — М.: 1981.

86. **Кривуца В. Г.** Определение надежности одной системы аналитико-статистическим методом. — Киев: ИК АН УССР, 198.. — (Деп. в ВИНИТИ 14.12.198.. № 5662-81).

87. **Левин В. И.** Вероятностный анализ надежных автоматов. — Рига: Зинатне, 1969.

88. **Леман Э.** Проверка статистических гипотез: Пер. с англ./Пер. Ю. В. Прохорова. — М.: Наука, 1979.

89. **Ллойд Д. К., Липов М.** Надежность: Пер. с англ./Под ред. — М.: Сов. радио, 1964.

90. **Лумельский Я. П.** Статистические методы контроля (последующие оценки). — В кн.: Статистические методы в задачах испытаний и контроля. — М.: Знание, 1979, с. 46—85.

91. **Любатов Ю. В.** Оптимальная процедура локализации неисправностей в модуляризованной радиоэлектронной системе. — Изв. АН СССР. Техническая кибернетика, 1964, № 4.

92. **Мандель А. С., Райкин А. Л.** Оптимальное планирование включений запасных элементов. — Автоматика и телемеханика, 1967, № 5.

93. **Мирный Р. А., Соловьев А. Д.** Оценка надежности системы по результатам испытаний ее компонент. — Кибернетику на службу коммунизму. — М.: Энергия, 1964, вып. 2, с. 213—218.

94. **Натансон И. П.** Конструктивная теория функций. — М.: Гостехиздат, 1949.

95. **Овчинников В. Н., Соловьев А. Д.** Асимптотический анализ послеотказовых характеристик надежности. — Труды III Всесоюз. школы-совещания по теории массового обслуживания, Пущино, 1974. Т. 1. М.: МГУ, 1976.

96. **О пакете** прикладных программ статистического моделирования сложных систем. — В кн.: Математические методы исследования операций и теории надежности. — Киев: ИК АН УССР, 1979, с. 29—38.

97. **Оптимальные** задачи надежности. Комитет стандартов, мер и измерительных приборов при Сов. Министров СССР/Под ред. И. А. Ушакова. — М., 1968.

98. **Оуэн Д. Б.** Сборник статистических таблиц: Пер. с англ. — М.: ВЦ АН СССР, 1973.

99. **Павлов И. В.** Вычисление доверительных границ для функций многих неизвестных параметров. — Изв. АН СССР. Техническая кибернетика, 1972, № 2, с. 89—92.

100. **Павлов И. В.** Доверительная оценка надежности системы по результатам испытаний компонент. — Изв. АН СССР. Техническая кибернетика, 1973, № 1, с. 52—61.

101. **Павлов И. В.** Оценка надежности системы по результатам испытаний стареющих элементов. — Изв. АН СССР. Техническая кибернетика, 1974, № 3, с. 95—107.

102. **Павлов И. В.** Доверительная оценка показателей надежности и эффективности систем по результатам испытаний на надежность. — В кн.: Вопросы экспериментальной оценки показателей надежности. — М.: Знание, 1979, с. 3—55.

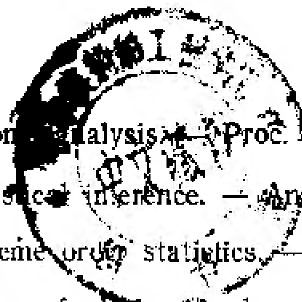
103. **Павлов И. В.** Доверительные границы для выпуклых функций многих неизвестных параметров. — Теория вероятностей и ее применения, 1980, 25, № 2, с. 394—399.

104. **Павлов И. В.** О фидуциальном подходе при построении доверительных границ для функций многих неизвестных параметров. — ДАН СССР, 198.., т. 258, № 6.

105. **Павлов И. В.** Статистические методы оценки характеристик надежности и эффективности сложных систем по результатам испытаний. — М.: Сов. радио, 1982.
106. **Пархоменко П. П.** О технической диагностике. — М.: Знание, 1969.
107. **Пархоменко П. П.** Оптимальные вопросники с неравными ценами вопросов. — ДАН СССР, 1969, т. 184, № 1, с. 51—54.
108. **Пархоменко П. П.** Теория вопросников. — Автоматика и телемеханика, 1970, № 4.
109. **Пашковский Г. С.** Методы оптимизации программ последовательного поиска неисправностей. — Изв. АН СССР. Техническая кибернетика, [illegible], № 2, с. 59—70.
110. **Пашковский Г. С.** Минимаксные стратегии обслуживания сложных систем. — Надежность и контроль качества, 1976, № 11.
111. **Пашковский Г. С.** Оптимальный алгоритм дискретного поиска неисправностей. — Изв. АН СССР. Техническая кибернетика, 1977, № 3, с. 80—86.
112. **Пашковский Г. С.** Иерархические модели экспериментов в байесовской теории принятия решений. — Там же, № 6, с. 91—99.
113. **Пашковский Г. С.** Последовательное улучшение байесовских решений. — Автоматика и телемеханика, 1979, № 3, с. 62—70.
114. **Пашковский Г. С.** Задачи оптимального обнаружения и поиска отказов в РЭА./Под ред. И. А. Ушакова. — М.: Сов. радио, 1981.
115. **Перроте А. И., Карташов Г. Д., Цветаев К. Н.** Основы ускоренных испытаний радиоэлементов на надежность. — М.: Сов. радио, 1968.
116. **Перроте А. И., Строчак М. С.** Вопросы надежности радиоэлектронной аппаратуры. — М.: Сов. радио, 1976.
117. **Пешес Л. Я., Степанова М. Д.** Модели ускоренных испытаний. — Изв. АН СССР. Техническая кибернетика, 1968, № 3, с. 38—43.
118. **Полиа Г., Сеге Г.** Задачи и теоремы из анализа. Ч. 1.: Пер. с нем./Под ред. В. Л. Гончарова. — М.: Гостехиздат, 1956.
119. **Прабху Н.** Методы теории массового обслуживания и управления запасами: Пер. с англ./Под ред. И. Н. Коваленко. — М.: Машиностроение, 1969.
120. **Прохоров Ю. В.** Характеризация класса распределений распределением некоторой статистики. — Теория вероятностей и ее применения, 1965, т. 10, № 3, с. 479—487.
121. **Пуанкаре А.** Избранные труды: Пер. с франц. — Т. 1. — М.: Наука, 1971.
122. **Райкин А. Л.** Вероятностные модели функционирования резервированных устройств. — М.: Наука, 1971.
123. **Райкин А. Л.** Методы теории надежности при проектировании систем./Под ред. И. А. Ушакова. — М.: Сов. радио, 1978.
124. **Рао С. Р.** Линейные статистические методы и их применения: Пер. с англ./Под ред. Ю. В. Линника. — М.: Наука, 1968.
125. **Рубальский Г. Б.** Управление запасами при случайном спросе (модели с непрерывным временем)/Под ред. И. А. Ушакова. — М.: Сов. радио, 1977.
126. **Рубальский Г. Б.** Задачи управления запасом резервных изделий. — В кн.: Оптимальное резервирование и управление запасами. — М.: Знание, 1979.
127. **Рыжиков Ю. И.** Управление запасами. — М.: Наука, 1969.
128. **Севастьянов Б. А.** Эргодическая теорема для марковских процессов и ее приложение к телефонным системам с отказами. — Теория вероятностей и ее применения, 1957, т. 11, № 1, с. 106—116.
129. **Седякин Н. М.** Об одном физическом принципе надежности. — Изв. АН СССР. Техническая кибернетика, 1966, № 3, с. 80—87.
130. **Соловьев А. Д.** Резервирование с быстрым восстановлением. — Изв. АН СССР. Техническая кибернетика, 1970, № 1, с. 56—70.
131. **Соловьев А. Д., Сахобов О.** Двусторонние оценки надежности восстанавливаемых систем. — Изв. АН СССР. Техническая кибернетика, 1977, № 4.
132. **Справочник** по специальным функциям: Пер. с англ./Под ред. М. Абрамовица и И. Стигана. Пер. под ред. В. А. Диткина и Л. Н. Кармазиной. — М.: Наука, 1979.
133. **Статистические** задачи отработки систем и таблицы для числовых расчетов показателей надежности/Под ред. Р. С. Судакова. — М.: Высшая школа, 1975.

134. **Судаков Р. С.** К вопросу об интервальном оценивании показателя надежности последовательной системы. — Изв. АН СССР. Техническая кибернетика, 1974, № 3, с. 86—94.
135. **Судаков Р. С.** Видоизменение результата Мирного и Соловьева для случая резервированных систем. — В кн. Точность и надежность кибернетических систем. — Киев: Наукова думка, 197[illegible], вып. [illegible].
136. **Судаков Р. С.** Об интервальном оценивании. — Изв. АН СССР. Техническая кибернетика, 1980, № 1, с. 67—77.
137. **Тескин О. И.** Точные доверительные границы для надежности резервированных систем при безотказных испытаниях их элементов. — Изв. АН СССР. Техническая кибернетика, 1979, № 4, с. 132—139.
138. **Тимонен Л. С.** О построении оптимальных программ диагностики состояния сложных технических систем. — Изв. АН СССР. Техническая кибернетика, 1966, № 4, с. 95—101.
139. **Ушаков И. А.** Приближенное решение задачи оптимального резервирования. — Радиотехника, 1965, т. 20, № 12.
140. **Ушаков И. А.** Методы решения простейших задач оптимального резервирования при наличии ограничений. — М.: Сов. радио, 1969.
141. **Ушаков И. А.** Эвристический метод оптимизации резервирования многофункциональных систем. — Изв. АН СССР. Техническая кибернетика, 1971, № 2.
142. **Ушаков И. А.** Приближенное решение задачи об оптимизации среднего времени безотказной работы системы. — Надежность и контроль качества, 1971, № 11.
143. **Ушаков И. А.** Определение оптимального порядка контроля элементов в целях проверки работоспособности аппаратуры (в [97]).
144. **Ушаков И. А., Гордиенко Е. И.** О статистическом подходе к решению некоторых задач оптимизации. Math, operationsforch. — statist, 1979, № 1.
145. **Ушаков И. А., Топольский М. В.** Оптимизация среднего времени безотказной работы системы. — Надежность и контроль качества, 1974, № 3.
146. **Ушаков И. А., Ясеновец А. В.** Статистические методы решения задач оптимального резервирования. — Изв. АН СССР. Техническая кибернетика, 1977, № 6, с. 12—21.
147. **Фархадзаде Э. М.** О расхождении граничных значений доверительных и фидуциальных интервалов параметров надежности систем. — Изв. АН СССР. Техническая кибернетика, 1979, № 4, с. 196—199.
148. **Феллер В.** Введение в теорию вероятностей и ее приложения: Пер. с англ. — М.: Мир, Т. 1, 1964.
149. **Феллер В.** Введение в теорию вероятностей и ее приложения: Пер. с англ. — М.: Мир, Т. 2, 1967.
150. **Фихтенгольц Г. М.** Курс дифференциального и интегрального исчисления. — 7-е изд. — М.: Наука, 1969.
151. **Харди Г., Литтлвуд Д., Полиа Г.** Неравенства: Пер. с англ. — М.: ИЛ, 1948.
152. **Хедли Дж., Уайтин Т.** Анализ систем управления запасами: Пер. с англ./ Под ред. А. Л. Райкина. — М.: Наука, 1969.
153. **Хинчин А. Я.** Работы по математической теории массового обслуживания.— М.: Физматгиз, 1963.
154. **Церцвадзе П. Н.** Стохастические автоматы и задача построения надежных автоматов из ненадежных элементов. Ч. I. — Автоматика и телемеханика, 1964, № 2.
155. **Церцвадзе П. Н.** Стохастические автоматы и задача построения надежных автоматов из ненадежных элементов. Ч. II. — Автоматика и телемеханика, 1964, № 5.
156. **Чепурин Е. В., Дугина Т. Н.** Об одном классе устойчивых статистических оценок в теории надежности. — Изв. АН СССР. Техническая кибернетика, 1970, № 1, с. 72—79.
157. **Barlow R. E.** Likelihood ratio tests for restricted families. — Ann. Math. Statist., 1968, v. 39, № 2, p. 547—560.

158. **Barlow R. E., Proschan F.** Inequalities for linear combinations of order statistics from restricted families. — Ann. Math. Statist., 1966, v. 37, № 6, p. 1574—1592.
159. **Barlow R. E., Proschan F.** Tolerance and confidence limits for classes of distributions based on failure rate. — Ann. Math. Statist., 1966, v. 37, № 6.
160. **Barlow R. E., Proschan F.** A note on tests for monotone failure rate based on incomplete data. — Ann. Math. Statist., 1969, v. 40, № 2, p. 595—600.
161. **Barlow R. E., Proschan F.** Statistical theory of reliability and life testing, probability models. — New York: Holt, Rinenart and Winston, Inc., 1975.
162. **Barlow R. E., Proschan F.** Some current academic research in system reliability theory. — IEEE Trans, 1976, v. R-25, № 3, p. 198—201.
163. **Barlow R. E., Proschan F.** Inference for the exponential life distribution. C. 1 — Statist. Rep. M531, Florida State University, 1980. — 40 p.
164. **Barlow R. E., Proschan F.** Life distribution models and incomplete data. C. 2 — Statist. Rep. M568, Florida State University, 1981. — 53 p.
165. **Barlow R. E., Scheuer E. M.** Estimation from accelerated life tests. — Technometrics, 1971, v. 13, № 1, p. 145—149.
166. **Bartholomew D. J.** Testing for departure from exponential distribution. — Biometrika, 1957, v. 44, № 2, p. 253—256.
167. **Bartholomew D. J.** The sampling distribution of an estimate arising in life testing. — Technometrics, 1963, v. 5, № 3, p. 361—374.
168. **Basu A. P.** Estimates of reliability for some distributions useful in life testing. — Technometrics, 1964, v. 6, № 2, p. 215—219.
169. **Bellman R., Dreyfus S.** Dynamic programming and reliability of multycomponent devices. — Oper. Research, 1958, v. 6, № 2, p. 200—206.
170. **Bickel P.** Tests for monotone failure rate II. — Ann. Math. Statist., 1969, v. 40, № 4, p. 1250—1260.
171. **Block H. W.** Multivariate reliability classes. — In: Applications of Statistics/Ed. by Krishnaiah P. R. — Nord Holland Publishing Company, 1977.
172. **Brule J., Johnson R. A., Kletsky E. J.** Diagnosis of equipment failures. — IRE Trans., 1960, v. PRQC-9, № 1.
173. **Bryant C. M.** Schmee Confidence limits on MTBF for sequential test plans of MIL-STD 781. — Technometrics, 1979, v. 21, № 1, p. 33—42.
174. **Buehler R. J.** Confidence intervals for the product of two binomial parameters. — J. Amer. Statist. Assoc., 1957, v. 52, p. 482—493.
175. **Chepurin E. V., Fermann P.** On unequalities for functionals of bivariate distributions with monotone failure rates. — Operation Forschung und Statistik. Ser. Statist., 1978, v. 9, p. 395—404.
176. **Chow Y. S., Robbins H.** On optimal stopping rules. — Z. Wahrscheinlichkeitheorie verw. Geb., 1963, v. 2, p. 33—49.
177. **Derman C., Sacks J.** Replacement of periodically inspected equipment. — Nav. Res. Logist. Quart., 1960, v. 7, № 4, p. 47—51.
178. **Dumonceaux R., Antle C. E.** Discrimination between the lognormal and the Weibull distributions. — Technometrics, 1973, v. 15, № 4, p. 923—926.
179. **El Mawasiny A. H., Beuhler R. J.** Confidence limits for reliability of a series system. — J. Amer. Statist. Assoc., 1967, v. 62, p. 1452—1459.
180. **Engelhardt M., Bain L. J.** Tolerance limits and confidence limits on reliability for the two-parameter exponential distribution. — Technometrics, 1978, v. 20, № 1, p. 37—39.
181. **Epstein B.** Tests for the validity of the assumprion that the underlying distribution of life is exponential. Pt. I. — Technometrics, 1960, v. 2, № 1.
182. **Epstein B.** Tests for the validity of the assumption that the underlying distribution of life is exponential. Pt. II. — Technometrics, 1960, v. 2, № 2.
183. **Epstein B., Sobel M.** Life testing. — J. Amer. Statist. Assoc., 1953, v. 48.
184. **Epstein B., Sobel M.** Some theorems relevant to life testing from an exponential distribution. — Ann. Math. Statist., 1954, v. 25, № 2, p. 373—381.
185. **Everett H.** Generalized Lagrange multiplier method for solving problems of optimum allocation of resources. — Oper. Research, 1963, v. 11, № 3.
186. **Firstman J., Gluss B.** Optimum search routines for automatic fault location. — Oper. Research, 1960, v. 8, № 4, p. 512—523.
187. **Fisher R. A.** Statistical methods for Zesearch workers. — Edinbourgh: Oliver Boyd, 1925.



188. **Fisher R. A.** Tests of significance in harmonic analysis. — Proc. Royal. Soc., Ser. A, 1929, v. 125, p. 54—59.
189. **Fisher R. A.** The fiducial argument in statistical inference. — Ann. Engenics, 1935, v. 5, p. 391—398.
190. **Galambos J.** The asymptotic theory of extreme order statistics. — New York: John Wiley, 1978.
191. **Gluss B.** An optimum policy for detecting a fault in complex systems. — Oper. Research, 1959, v. 7, № 4, p. 468—477.
192. **Guenther W. G., Patil S. A., Uppuluri V. R. R.** One sided ß-content tolerance factors for the two parameter exponential distribution. — Technometrics, 1976, v. 18, № 3, p. 333—340.
193. **Hartley H. O.** The maximum F-ratio as a short-cut test of heterogeneity of variance. — Biometrika, 1950, v. 37, № 3, p. 308—312.
194. **Hollander M., Proschan F.** Testing whether new is better than used. — Ann. Math. Statist., 1972, v. 43, № 4, p. 1136—1146.
195. **Johnson R. A.** An information theory approach to diagnosis. — Proc. 6th Nat. Symp. on RQC in Electronics, 1960.
196. **Kao P., Kao E. P. C., Mogg J. M.** A simple procedure for computing performance characteristics of truncated sequential tests swith exponential lifetimes. — Technometrics, 1979, v. 21, № 2, p. 229—232.
197. **Kettele J.** Least-cost allocation of reliability investment. — Oper. Research, 1962, v. 10, № 2, p. 249—265.
198. **Klein M.** Inspection-maintenance-replacement schedules under markovian deterioration. — Manag. Sci., 1962, v. 9, № 1, p. 150—157.
199. **Klimko L. A., Antle C. E., Rademaker A. W., Kockette H. E.** Upper bounds for the power of invariant tests for the exponential distribution with Weibull alternatives. — Technometrics, 1975, v. 17, № 3, p. 357—360.
200. **Lemon G. H.** Maximum likelihood estimation for the three parameter Weibull distribution based on censored samples. — Technometrics, 1975, v. 17, № 2.
201. **Mann N. R., Fertig K. W.** A goodness-of-fit test for the two parameter vs. three parameter Weibull, Confidence bounds for threshold. — Technometrics, 1975, v. 17, № 2, p. 237—246.
202. **Mann N. R., Schafer R. E., Singpurwalla N. D.** Methods for statistical analysis of reliability and life data — New York: John Wiley Sons, 1974.
203. **Marschall A., Proschan F.** Classes of distributions applicable in replacement with renewal theory implications. — Proc. Sixth Berkeley Symp. on Math. Statist. and Probab., Univ. California Press, 1972, v. 1, p. 395—415.
204. **Marschall A. W., Walkup D. W., Wets R. J. B.** Order preserving functions; Applications to majorisation and order statistics. — Pacific J. Math., 1967, v. 23, p. 569—584.
205. **MIL STD-781S** — Washington. D. C.: Government Printing Office, 1977.
206. **Molenaar W.** Approximations to the Poisson, Binomial and hypergeometric distribution functions. — Amsterdam: Math. Centrum, 1970.
207. **Moskowitz F., McLean J.** Some reliability aspects of system design. — IRE Trans., 1956, v. PGRQC-8, sept.
208. **Neyman J.** On the problem of confidence intervals. — Ann. Math. Statist., 1935, v. 6, № 1, p. 111—116.
209. **Norula S. C., Li F. S.** Sample size calculations in exponential life testing. — Technometrics, 1975, v. 17, № 2, p. 229—231.
210. **Osaki Shunji, Mine Hisashi** Linear programming algorithms for semi-Markovian decision processes. — J. Math. Anal. and Appl., 1968, v. 22.
211. **Pough E. L.** The best estimate of reliability in the exponential case. — Operations Research, 1963, v. 11, p. 57—61.
212. **Proshan F.** Resent research on classes of life distributions useful in maintenance modeling. C. 13. — In Modern trends in logistic research/Ed. by W. H. Marlow. — MIT Press, 1976. p. 334—347.
213. **Pyke R.** Spacings. — J. Royal Statist. Soc. Ser B27, 1965, p. 395—449.
214. **Yee MingNg.** A note on the best test for discrimination between exponentiality and uniformity. — Technometrics, 1976, v. 18, № 2, p. 237—238.
215. **Winter B.** Optimal diagnostic procedures. — IRE Trans., 1960, PRQC-9, № 3.
216. **Таташев А. Г., Ушаков И. А.** Задача переключения резервных элементов по расписанию. — Изв. АН СССР. Техническая кибернетика, 1981, № 5.